



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

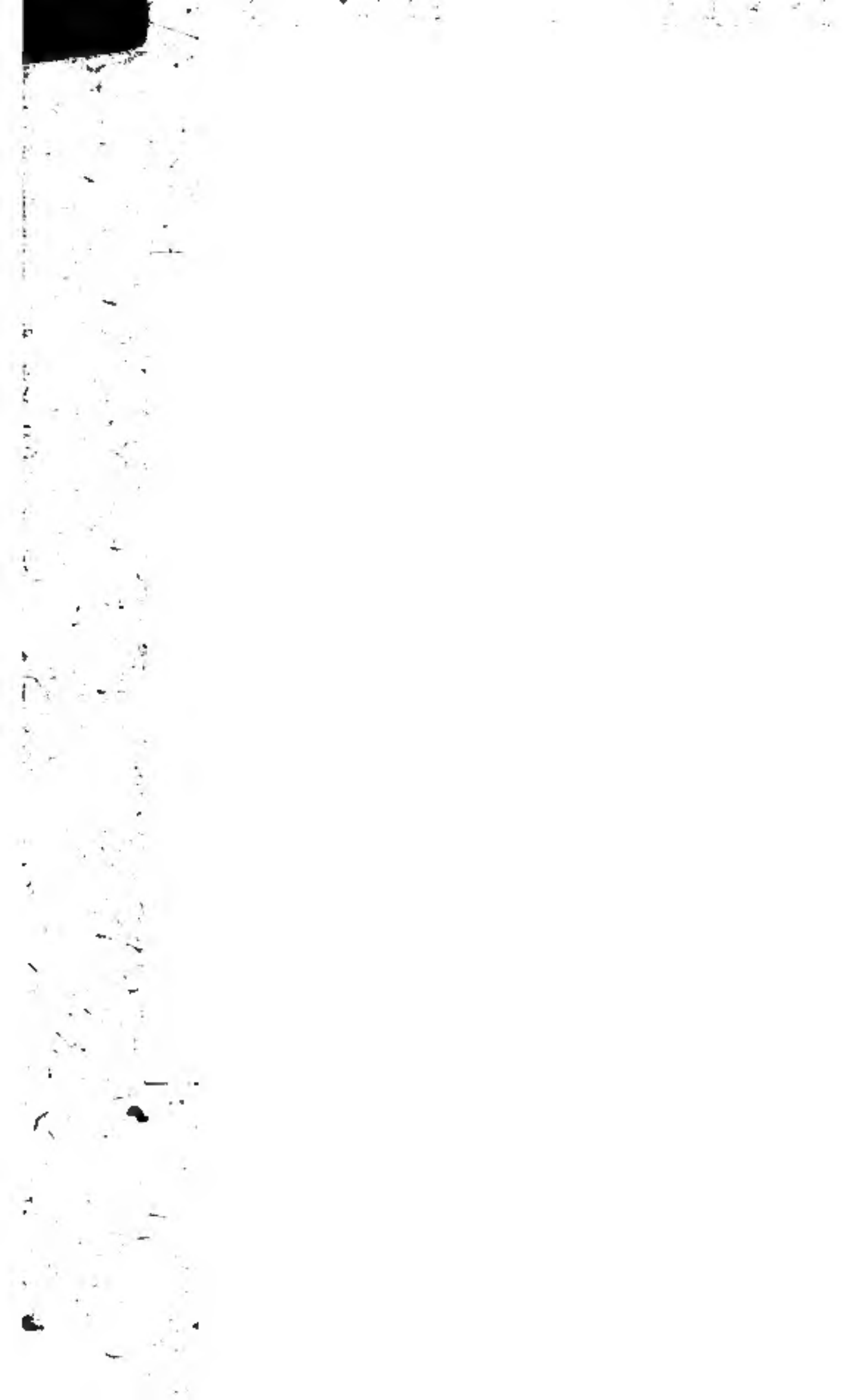
Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



QA

35

C63

1777

D. Heinrich Wilhelm Clemm,
 Doctor und Prof. der Theologie auf der Universität
 Tübingen &c. &c.

Erste Gründe
 aller
 mathematischen
 Wissenschaften.

Neue verbesserte Auflage.

Stuttgart,
 verlegt Johann Benedict Metzler.
 1777.

Vorbericht

von meinen Zuhörern, welchen ich, diesen Sommer über, die einzelne aus der Druckerey nach und nach gekommene Bögen erklärt habe, ehe sie mich noch hörten, das meiste verstanden, und von sich selbst durch das bloße Lesen begriffen haben; daher billig vermuthet, daß diese Schrift bey andern aufmerksamen Lesern eine gleiche Wirkung haben, und vielleicht mit mehrerem Vergnügen gelesen werde, als manche bloß zum Zeitvertreib gekaufte Bücher.

Die Absicht, warum ich schreibe, hiesse mich also vorzüglich faßlich und deutlich seyn. Darum mußte ich zuweilen weitläufig werden. Aus eben diesem Grunde vermied ich das schulmäßige in der Schreibart, und erwählte

wählte für die am Rand sonst benzesetzte Namen der Grund-Lehr-Zusätze, u. s. w. solche Marginalien, welche dem Leser den Inhalt des Textes viel deutlicher, als diese Worte, sagen. Wann man die Marginalien selbst in kurze Sätze verwandelt, so hat man einen Auszug oder eine Sammlung von Erklärungen und Lehrsätzen, die ich selbst in dieser Form würde angehängt haben, wenn ich es für nöthig erachtet hätte, einerley Sachen zweymal zu sagen, oder die Mathematik in ein Gedächtniswerk zu verwandeln.

Was die Figuren betrifft, so hat man deren zwar nicht viel, aber doch so viel, als man nöthig hat. Ich habe auch dißfalls die Lehrart der Alten, welche ihre Zeichnungen so kurz, als

Vorbericht

möglich war, vorgetragen hatten, um so eher befolget, weil oft manche Leser die allzuvielen Figuren entweder bloß bewundern, oder auch gar eben wegen ihrer Menge scheuen. Beedes habe ich zu vermeiden gesucht. Man findet daher in den meinigen bloß die Euclideanische und einige neuere Zeichnungen, aber keine Mahlerenen.

Bei der Ausarbeitung des Werks selbst habe ich mich der Deutlichkeit, aber einer solchen, welche denen, die aus andern Schriften schon die Mathematik erlernen hatten, durch keine unnöthige Neuerungen verdrüsslich werden sollte. Darum habe ich die vom Herrn Baron von Wolf geschöpfte Namen und Ausdrücke mehrentheils beibehalten, ob ich schon
übrig

übrigens die Mathematik in einem ganz andern Kleide vorstelle.

Wie ich nun von meinen ehemas-
ligen Lehrern, dem seligen Herrn
Professor Kraft, und von dem weit-
berühmten Herrn Professor Euler zu
Petersburg in dieser Wissenschaft
nicht wenig gelernet habe, so wird man
nach beliebiger Durchblätterung des
Werkes bey denjenigen Stellen, wo
ich ihre Schriften anführe, die Be-
weise meiner Hochachtung und Dank-
barkeit gegen diese Männer erkennen;
zugleich aber auch urtheilen, wieferne
ich nach dem Zweck dieses Buchs ei-
ne eigene Arbeit geliefert habe.

In Rücksicht auf die Menge der
Schriften dieser Art weiß ich seit hun-
dert und mehr Jahren wenigstens in

Vorbericht

unserm Lande keinen, der die reine Mathematik nach allen ihren Haupttheilen vorgetragen hätte, ausser den ehemaligen Abten in Bebenhausen, Johann Jacob Hainlin, welcher im Jahr 1653. eine Synopsin mathematicam für diejenige, die in dem Würtembergischen studieren, nach der Lehrart selbiger Zeiten, und so weit man damals gekommen war, herausgegeben. Inzwischen, und seit dieser Zeit, sind zwar je und je verschiedene Rechenbücher, Geometrien, auch algebraische Abhandlungen, aber nur einzeln, und so ans Licht getreten, daß ein Leser vielerley Bücher und noch dazu von unterschiedenen Verfassern zusammen kaufen müßte, wenn er etwas ganzes in der Mathematik haben wollte.

wollte. Im gegenwärtigem Buche hingegen findet man alles beisammen, was zu der sogenannten reinen Mathematik, folglich zu den ersten Gründen aller mathematischen Wissenschaften, gehöret, welche sich hernach so wohl auf die Naturlehre als auch auf andere Disciplinen anwenden lassen. Das weitere von dieser Benennung liefert man in der Einleitung.

Soll ich endlich noch etwas vom Gebrauch dieser Wissenschaft sagen, so dünkt mich, sie seye weit geschickter unsern Verstand zu bilden, als dasjenige, was heut zu Tag den Geschmack vieler Studierenden ausmacht, und was der berühmte Herr Hofrath Kästner in einer artigen Parodie zu

Vorbericht

tadeln scheint, wenn er einem wißigen
Freund in sein Stammbuch schreibt: (*)

O könnte dich ein Schatten rühren,
Der Wohl lust, die die Herzen spühren,
Die sich der Meßkunst zugedacht!
Du foderdest von dem Geschieße
Die leeren Stunden noch zurücke,
Die du mit Liedern zugebracht! *)

Inzwischen muß man doch in dem
Lob der Mathematik nicht zu weit
gehen, und auch von dem größten
Meßkündigen eben so denken, wie der
schon gerühmte Gelehrte an einem an-
dern Ort schreibt:

Auch Newtons Alter selbst verbaucht
mit Newtons Fleiß,

Macht nur bey Sterblichen ihn zum
gelehrten Greiß!

Die

*) Man sehe Herrn Hofrath Kästners vermischte Schriften.

Die Mathematik ist wirklich die schönste und zuverlässigste Wissenschaft: aber nur für die Bewunderung eines Sterblichen. Dann so schön sie auch ist, und so einen großen Vorzug sie vor allen andern auch philosophischen Tändeleien der Sterblichen hat, so ist sie doch kaum der allergeringste Theil derjenigen Weisheit, welche einen für die Ewigkeit geschaffenen Geist wahrhaftig vergnügen und ergötzen kann.

Schrieb auf die Michaelis-Messe

I 7 5 9.

Der Verfasser.

Vor



V o r r e d e
zur
zweyten Auflage.

Da meine mathematische Bücher so glücklich gewesen, den Beyfall der Kenner zu erhalten, so lasse ich es nicht nur geschehen, daß auch von gegenwärtigen Anfangsgründen, wie von dem mathem. Lehrbuch, eine neue Auflage veranstaltet wird, sondern freue mich besonders, daß das deutsche Publicum den Geschmack an einer Wissenschaft, wozu Verstand, Fleiß und Nachdenken gehöret, noch
immer

Vorrede zur zweyten Auflage.

immer unterhält. Dieses nebst dem Beyfall der Klugen ist die größte Belohnung, die sich ein Schriftsteller wünschen kann, dem es darum zu thun ist, dem Publico gewissenhaft zu dienen, und nützlich zu werden.

Weiter weiß ich bey dieser neuen Ausgabe nichts hinzu zu sagen, als daß ich mit Vorbedacht die Einrichtung mehrentheils ungeändert gelassen, auch nur wenige Zusätze gemacht habe, z. E. S. 15. S. 191-193. S. 372. S. 410. u. s. w. weil ich in der neuen Ausgabe meines mathematischen Lehrbuchs dasjenige hinlänglich vortragen, was man zur jetzigen Vollständigkeit

Vorrede zur zweyten Auflage.

ständigkeit dieser Wissenschaft verlangen möchte. Uebrigens werden Anfänger, wenn sie diese erste Gründe zuerst lesen, auch nachgehends das Lehrbuch selbst ohne weiteren mündlichen Unterricht lesen und verstehen können.

Gschlebs Tübingen,
den 15. Hornung
1769.

Heinrich Wilhelm Clemm,
der h. Schrift Doctor und öffentl. Professor der
Theol. auf der Universität Tübingen, wie auch
Superintendent und Pastor daselbst.

Ein

Einleitung:

§. I.

Die Mathematik kann nach dem Ursprung ihres griechischen Namens so gut die einzige Wissenschaft in der Welt heißen, als die Werke der Poeten nach gleicher Bedeutung des griechischen Worts die einzige Werke seyn sollen, die sich in die Welt schreiben und lesen lassen. Anfangs waren die Sprachen noch rau, hart, ungekünstelt, und nur nach der Nothdurft eingerichtet, folglich an keine Regeln gebunden. Allein die Poeten gaben ihnen zuerst durch ihre Arbeiten eine Gestalt, und erhielten zur Belohnung dafür den Namen, den sie jezo noch tragen, nemlich den Namen der Schriftsteller, oder der Autoren: denn ein Poet, das ist derjenige, der etwas macht, schreibt, oder heraus giebt, und ein Schriftsteller hatten vor Zeiten im Griechischen einerley Be-

Ursprung des
Namens
der Mathes-
matik.

deutung. Daher kommt es auch, daß die älteste Scribenten der Griechen, was sie nur immer geschrieben, mehrentheils in Versen geschrieben haben. Die mathematische Wissenschaften haben in Rücksicht auf ihren Namen einen fast gleichen Ursprung. Als die Welt noch junge war, fanden sich schon Leute, welche die verschiedene Grössen der Felder und Ländereien mit einander verglichen, und die erste Grundlage der Meßkunst ausdachten. Sie sahen, daß die davon erlangte Wissenschaft zuverlässig und gründlich seye; dahero nachgehends bey den Griechen die Meßkundigen selbst, oder diejenigen, die sie ehren wollten, den Namen der Mathematik oder einzigen Disciplin, weil man vielleicht damals noch keine andere hatte, erfunden und dieser Wissenschaft beygelegt haben mögen. Unerachtet es nun heut zu Tag noch viele andere Mathemata oder Disciplinen giebt, welche in der That zuverlässig und zu wissen gleich nöthig sind; so ist doch der mathematische Name den Meßkünstlern immer eigen geblieben und wird ihnen noch lange eigen bleiben, es mag hernach das hohe Alter dieser Wissenschaft, oder ihre unläugbare Gründlichkeit, oder ihr allgemeiner Nutzen, oder die billige Neigung, alte Namen nicht ohne Grund zu ändern, die Ursache davon seyn.

Warum er
der Meßkunst
beygelegt,

und noch bis
jezo beybe-
halten wor-
den seye?

§. 2. Wir haben von dem Ursprung des Worts das nöthigste gesagt, unerachtet wir eben nicht gesonnen sind, der Mathematik eine Lobrede zu schreiben, und sie als die vornehmste, vielweniger als die einige Disciplin, unsern Lesern anzurühmen. Die Eitelkeit der Alten, und auch einiger Neuern, gehet hier zu weit. Das allersubtilste und schärfste Messer hat seinen Nutzen, aber man bräucht es eben nicht, Brod damit zu schneiden. Zu diesem Zweck sind andere noch besser dienlich. So geht es auch mit der Mathematik. Wenn man sich allein mit Hintansetzung aller andern gleichguten Wissenschaften darauf leget; so ahmt man den Poeten nach, welche gemeiniglich darben, wenn sie ihre schöne Wissenschaften nicht auch mit andern verbunden haben. Wer aber die Mathematik in derjenigen Absicht erlernet, daß er seine übrige Wissenschaften, es mögen hernach theologische oder andere seyn, desto gründlicher fasse; der wird einen wahren und bleibenden Nutzen in seinem ganzen Leben davon haben, und diejenige Stunden nicht bereuen, welche er auf eine Arbeit verwandt hat, die den Kopf nicht nur aufräumet, sondern auch die Ordnung im Denken, die Aufmerksamkeit, die Deutlichkeit, und die Fähigkeit, neue Wahrheiten zu erfinden, immer höher bringet.

In wie fern die Mathematik ein vorzügliches Lob verdiene, und was sie bey allen Wissenschaften für einen Nutzen habe.

Was die Absicht gegenwärtiger Arbeit seye;

und warum die praktische oder anwendende Mathematik nicht auch vorgetragen werde.

§. 3. Dieser Absicht ist nun unsere gegenwärtige Abhandlung gewidmet. Ich werde die mathematische Wissenschaften, doch ohne weiter auf die praktische Anwendung bei den vielerley Rechnungen, dem Feldmessen, im eigentlichen Verstand, und den übrigen durch die Mathematik empor gekommenen Künsten mein Augenmerk besonders zu richten, nur in so fern zu erläutern und deutlich zu machen suchen, daß der Verstand des Menschen zur gründlichen Erkenntniß höherer Wissenschaften nach und nach zubereitet werde. Die Mechanik, die Astronomie, die Gnomonik, die bürgerliche und Militärbaukunst, die Wasserkünste sowohl in Ansehung des stehenden als des bewegten Wassers, sind eigene und besondere Wissenschaften, deren jegliche ihre Kenner belohnet: denn unerachtet ohne die erste Grundsätze der Mathematik keine gründlich gefaßt wird, so ist doch jedesmal eine ohne die andere in ihrer Art etwas ganzes, und kann als eine besondere Wissenschaft erlernt werden. Es giebt Mechanikverständige, die in ihrer Kunst vollkommen sind, ohne daß sie deswegen Astronomen zugleich seyn müßten. Ebenso hat man vortreffliche Baumeister, die deswegen noch keine Ingenieur sind, wie auch die besten Ingenieur nicht allemal die beste Baumeister bei Civilgebäuden sind. Wir

Wir sehen uns daher keineswegs genöthiget, die erste Gründe aller mathematischen Wissenschaften mit der anwendenden Mathematik dormalen zu vermehren, da ohnehin der Zweck gegenwärtiger Arbeit vorzüglich solche Leser und Zuhörer angethet, welche die Mathematik zu nichts anders, als zum gründlichen Denken und zu einem desto bessern Fortgang in den academischen Wissenschaften gebrauchen wollen. Nun ist es freylich nicht zu läugnen, daß auch die anwendende Mathematik zu diesem Vorhaben ungemein gute Dienste leistet. Allein ihr Umfang ist so groß, daß man bey den meisten Zuhörern befürchten mußte, die Vorbereitung würde ihnen so viele Zeit hinweg nehmen, daß sie zum Hauptzweck, um welches willen sie diese Wissenschaften lernen, zuletzt fast gar keine mehr übrig hätten. Es giebt nicht so gar viele Universalköpfe, welche mit geringer Mühe und in kurzer Zeit diese Wissenschaften gründlich fassen, und sie hernach zu einem Mittel gebrauchen, alles andere, was nur zu lernen möglich ist, sich wie ein Leibniz deutlich und vollständig bekannt zu machen. Hierzu kommt noch, daß diejenigen, welche die erste Gründe der sogenannten reinen Mathematik genau inne haben, mit leichter Mühe die Anwendung auf besondere Fälle machen, und wenn sie nur die Haupt-

Wie diejeni-
gen, welche an-
dern Wissen-
schaften ei-
gentlich ge-
widmet sind,
die Mathe-
matik studis-
ren sollen?

erklärungen genau fassen, und sodann die Figuren und darauf gebaute Rechnungen, z. E. in der Mechanik oder andern praktischen Disciplinen ansehen, sich von selbst werden helfen können. Ueberhaupt aber ist es nicht rathlich, daß junge Leute, wenn sie ihr Glück nicht blos durch die Mathematik machen wollen, sich in dergleichen Wissenschaften allzusehr ausbreiten oder gar verliehren, weil sonst der Geschmack an dem, wozu sie eigentlich gewidmet sind, theils verdorben wird, theils etwas annimmt, wodurch ihr Vortrag in andern Wissenschaften affectirt und gezwungen werden könnte. Diß ist der Grund, warum ich meine gegenwärtige Arbeit, so kurz sie auch ist, doch in ihrer Art für vollständig und dem Hauptzweck gemäß halte.

Die Mathe-
matik als ei-
ne Wissen-
schaft der
Größen, wird
erkläret, und
nach ihren
zwey Haupt-
theilen be-
schrieben.

§. 4. Die faßlichste Erklärung von der Mathematik bestehet darinnen, daß man sie eine Wissenschaft der Größen nennet. Die Größen lassen sich nun beedes durch Zahlen und Figuren ausdrücken. Folglich wird sich die Mathematik mit Zahlen und Figuren beschäftigen müssen. Die Zahlen und ihre Verhältnisse gegeneinander kann man entweder mit allgemeinen oder mit besondern Zeichen vorstellen. Wenn ich z. E. eine GröÙe habe, die sechs Schuhe lang und drey Schuhe breit, und übrigens rechtwinklicht ist: so kann
ich

ich entweder sagen, sie sey 6mal 3 Schuhe im Quadrat gleich; oder wenn ich die Länge a und die Breite b nenne, sie halte a mal b Quadratschuhe in sich. Die letztere Rechnung ist allgemeiner, wie man leicht siehet. Denn der Buchstabe a kann sechs, sieben, acht, neun, zehen Schuhe u. s. w. bedeuten; eben das kann man von dem Buchstaben b sagen. Folglich ist a mal b ein Ausdruck, der für unzähllich viele andere in genannten Zahlen gesetzt werden kann. Eben so läßt sich auch die Grösse durch eine wirkliche Figur ausdrücken. Ich darf nur ein Viereck mahlen, das 6 Schuh lang und 3 Schuh breit ist, so hab ich die obige Grösse gezeichnet. Da nun die Figuren durch die Grenzen der körperlichen Ausdehnung bestimmt werden; so wird man finden, daß die Grenzen der Körper, als Körper, Flächen, und die Grenzen der Flächen Linien, und die Grenzen der Linien Punkten seyen. Folglich handelt die Mathematik nicht nur von Zahlen, sondern auch von Körpern, Flächen und Linien; und zwar eben deswegen, weil sie eine Wissenschaft der Grössen ist.

J. 5. Eine Wissenschaft ist nicht nur eine bloße Geschichte oder Erzählung; eine Wissenschaft sey? das man z. E. sagen könnte, diß ist ein Punkt, diß ist eine Linie, diß eine Fläche, diß eine Zahl, und diese Zahl heißt

sieben, u. s. w. sondern sie begreift auch eine Fertigkeit in sich, dasjenige, was man sagt, zu erweisen, und die Gründe anzuführen, warum dieses oder jenes gesagt werde; oder überhaupt einen Satz oder eine Wahrheit aus unwidersprechlichen Gründen herzuleiten. Dinge, welche jedermann weiß und glaubt, erst weitläufig erweisen wollen, wäre sehr kindisch. Folglich muß derjenige, der die Kunst zu beweisen verstehen will, entweder nur diejenige Wahrheiten, die ganz unbekannt sind, oder wenigstens solche, daran man zweifelt, oder die man nicht so leicht einsieht, unumstößlich darzuthun suchen. Da nun die Mathematik eine Wissenschaft ist, so muß sie theils unbekannte, theils nicht genug erwiesene Eigenschaften der Größen erfinden und in ein gehöriges Licht setzen. Weil man aber unbekannte Wahrheiten nicht unmittelbar, sondern erst alsdann richtig finden kann, wenn man bekannte Wahrheiten, die mit den gesuchten etwas gemein haben, oder in einer nähern Verbindung mit ihnen stehen, voraussetzt und zu Grunde legt; so heißt erfinden nichts anders, als durch Hülfe bekannter Wahrheiten unbekannte entdecken, deren Verhältniß zu den bekannten uns gegeben wird. Z. E. ich solle zwey Zahlen finden, die zusammen fünfse ausmachen, und zugleich so beschaffen sind, daß,

Was Erfinden heiße, und wie die Mathematik die Erfindungskunst befördere?

Daß, wenn die eine von der andern abgezogen wird, der Rest eines seye. Diese Aufgabe ist leicht: denn die Zahlen sind drey und zwey; ihre Summe ist fünf, und zwey von drey abgezogen, läßt eins übrig. Hingegen wenn man verlangt, ich solle ein Quadrat finden, das gerade noch einmal so groß sey als ein anderes gegebenes Quadrat; so ist die Aufgabe schon schwerer. Das ist die bekannte pythagorische Erfindung. Noch schwerer ist das den alten Meßkünstlern am allerschwersten gefallene delphische Problem, kraft dessen ein Eubus, das ist, ein viereckiger Körper, der gleich lang, breit und hoch ist, verdoppelt oder in einen andern verwandelt werden sollte, welcher gerade noch einmal so groß und abermal gleich lang, breit und hoch wäre. Hieraus erhellet nun, daß die Mathematik überhaupt eine Wissenschaft seye, aus bekannten Größen andere unbekannte zu erfinden, welche zu den bekannten eine gegebene Verhältniß haben.

§. 6. Die Mathematik, in so fern sie sich mit bloßen Zahlen beschäftigt, wird Arithmetik genannt; in so fern sie aber mit Figuren umgeht, heißt sie die Geometrie. Da man aber auch in der Geometrie die verschiedene Größen ohne Zahlen nicht vergleichen, oder neue Eigenschaften daraus herleiten kann, folglich die

Warum die
Arithmetik
der Geometrie
vorgezogen
werde,

A 5

Zahl

und warum die Alten so gleich die Geometrie, ohne vorher die Arithmetik hinlänglich zu erläutern, vorge tragen haben.

Zahlen fast unumgänglich nöthig hat; so sieht man leicht, woher es komme, daß man die Arithmetik zuerst vortragen und lehren müsse. Dann obschon die Alten die Mathematik sogleich mit der Geometrie ohne eine eigentliche Arithmetik anfiengen; so geschah es aus Mangel theils der arabischen Zahlzeichen, die wir jezo haben, theils der sogenannten Algebra oder Buchstabenrechnung, welche sie entweder gar nicht hatten, oder als ein Geheimniß sorgfältig verbargen. Dahero war es in der Euclideanischen Schule und vor Alters ungleich schwerer, die Mathematik zu lernen, als es jezo ist. Man darf nur einen Versuch wagen, und mit dem griechischen Alphabet, nach der Bedeutung, welche die Buchstaben als Zahlzeichen haben, eine Rechnung anstellen; so wird man die Schwierigkeiten von selbst finden. Diß ist die Ursache, warum die griechische Meßkünstler das Zählen so viel möglich vermieden, und durch den Weg der Reduction z. E. viel leichter gesagt haben: alle Winkel, die aus einem Punkt auf einer geraden Linie gezogen werden, oder auch alle drey Winkel in einem Dreieck, seyen zween rechten Winkeln gleich; als daß sie gesagt hätten, sie machen 180 Grade. Da aber in unsern Zeiten aus schon angeführten und noch andern Gründen die Mathematik ungemein empor gekommen

Vorzug der neuern vor den alten.

Kommen ist; so achten wir uns verbunden, diese Wissenschaft so leicht und faßlich vorzutragen, als nur immer möglich ist. Darum werden wir die Arithmetik, und zwar sowohl nach den ordentlichen Zahlenzeichen als auch nach der Buchstabenrechnung, zuerst abhandeln.

§. 7. Eine jede Grösse bestehet aus Theilen, und diese Theile kann man als ihre Einheiten und Elemente ansehen. Je leichter und völliger sich nun eine Grösse in ihre Elemente eintheilen läßt, je einfacher und natürlicher die Elemente selbst sind, und je genauer und zuverlässiger man sie erkennt; desto sicherer ist der Schluß, den man davon aufs Ganze macht. Da man nun von den Elementen der mathematischen Körper eine so zuverlässige Erkenntniß bekommt; so ist es kein Wunder, daß man es in der Mathematik bisher weiter als in allen andern Wissenschaften gebracht hat. So können z. E. die Dreiecke, als die einfachste und nach allen ihren Eigenschaften genugsam bekannte Figuren, für die Elementen aller geradelinigten obgleich noch so irregulären Figuren angesehen werden: dahero lassen sich alle geradelinigte Figuren aufs genaueste ausmessen. Was zum Maas der krummlinigten Figuren, besonders in Absicht auf ihre Elemente, dienlich sene, werden wir bey der Differential- und Integral-

Warum man bey den ersten Anfangsgründen etwas weilschlüssiger seyn müsse.

Integralrechnung zeigen. So viel siehet man also schon, daß man es für keine unnöthige Weitläufigkeit halten dürfe, wenn man sich bei den einfachsten und simpelsten Figuren etwas länger aufhalten wird.

Von der allgemeinen mathematischen Sprache, oder vorläufige Erklärung der nöthigsten und am öftesten vorkommenden Zeichen und Charakteren.

§. 8. Aus gleichem Grunde wird es den Leser nicht befremden, wenn ich jezo auch die mathematische Sprache etwas umständlicher erkläre. Es muß doch ein Liebhaber dieser Wissenschaft vor allen Dingen eben so gut recht lesen und schreiben lernen, als derjenige, der eine fremde Sprache zu lernen anfängt. Die mathematische Sprache hat zwar ihre eigene Zeichen: was aber ihre Grundsätze, oder, wenn ich so reden darf, ihre grammatische Hauptregeln betrifft; so sind sie allgemein, und dem Menschen so natürlich und angebohren, daß es ihm anfänglich seltsam vorkommt, wenn man ihm sagt, er solle sich diese Hauptwahrheiten besonders bekannt machen, und in seinem Calculiren fleißig daran gedenken. Inzwischen wird man doch bald finden, wie nöthig es ist, daß man sie einem nicht nur sagt, sondern auch ausführlich erkläre. Da ich nun jezo von der mathematischen Sprache rede; so werde ich zuerst die Zeichen, die man wissen muß, erklären. Sie sind folgende:

$=$ ist das Zeichen der Gleichheit;
 \approx der Aehnlichkeit.

\vee dessen was kleiner ist, da die Spitze gegen dem kleinern gekehrt ist.

\wedge dessen was grösser ist, da die Oeffnung gegen dem grössern gekehrt wird.

\circ dessen was keine Grösse hat.

∞ dessen was in seiner Art unendlich groß ist.

$+$ der Addition; und wird ausgesprochen plus.

$-$ der Subtraction und der arithmetischen Verhältniß; wird ausgesprochen minus.

\times wie auch. oder bey der Multiplication.

den Buchstaben nur die bloße Zusammensetzung, $ab = a. b$

: wie auch ein Strich zwischen zwey unter einander gesetzten Zahlen, $\frac{2}{3}$ der Division; und der geometrischen Verhältniß.

$\sqrt{}$ der Wurzeln.

Unter diesen Zeichen kommt das erste, nemlich das Zeichen der Gleichheit, am alleröftesten vor. Wir wollen aber von allen Exempel geben, weil wir doch solche Leser voraussetzen, welche die vier sogenannte Species der Arithmetik ein wenig verstehen. Z. E. wenn es heißt: $6 + 2 = 8$, so spricht man diese Schrift also aus: sechs

se plus zwey ist gleich achte. $4 - 1 = 3$
 heißt: vier minus eins ist gleich drey.
 $6 \cdot 3 = 18$ oder $6 \times 3 = 18$. heißt: sechs
 multiplicirt mit drey ist gleich acht-
 zehen. $ab = yx$ heißt a multiplicirt mit b
 ist gleich y multiplicirt mit x . Doch ge-
 het eine solche bloße Zusammensetzung bey
 den gewöhnlichen Zahlzeichen nicht wie bey
 den Buchstaben an. Die Ursache ist leicht
 begreiflich. Man würde sich gar leicht
 verwirren. Dann $6 \cdot 3$ oder sechs mul-
 tiplicirt mit drey, kann ich nicht bloß zus-
 sammen setzen, und sagen 63; weil es im
 Numeriren drey und sechzig heißt.
 $6:2 = 3$ oder $\frac{6}{2} = \frac{3}{1}$ wird ausgesprochen:
 sechs dividirt durch zwey ist gleich
 drey $\frac{1}{\infty} = 0$. eins dividirt ins unendli-
 che, wird nichts, oder unendlich klein.
 $4 > 3$ vier ist grösser als drey. $2 < 5$
 zwey ist kleiner als fünf. $\sqrt{16} = 4$. die
 Quadratwurzel von sechszehen ist
 gleich vier. Wir werden an seinem Ort ze-
 gen, daß, wenn auf dem Wurzelzeichen
 nichts stehe, es allemal die Quadratwur-
 zel anzeige; in andern Fällen muß eine Zahl
 darüber stehen, 3. E. $\sqrt[3]{8} = 2$ die Cubic-
 wurzel aus acht ist gleich zwey. Diß
 ist etwas schwerer, und gehört daher nicht
 in die Einleitung; wie auch die Gleichung
 $3 - 1 = 4 - 2$ drey minus eins ist
 gleich vier minus zwey; wodurch ei-
 ne

ne arithmetische Proportion, wie durch die folgende $6 : 3 = 8 : 4$ sechs zu drey wie achte zu vier, oder sechs dividirt durch drey ist gleich acht dividirt durch vier, eine geometrische Proportion ausgedrückt wird. Eben so werden wir auch an seinem Ort zeigen, wie man in der Geometrie die Linien, und Winkel u. s. w. lesen und aussprechen müsse.

§. 9. Die Grundregeln, nach welchen sich diejenigen, die in der Mathematik was thun wollen, beständig richten müssen, werden nicht weniger faßlich seyn. Sie sind folgende:

Allgemeine Grund- und Hauptregeln, nach welchen sich die Mathematik vorzüglich richtet, und welche fast auf allen Blättern gedacht werden müssen.

I. Eine jede Grösse ist sich selber gleich; und eine jede Grösse ist ihren wirklichen Theilen zusammen genommen gleich. 3. E.

$$8 = 5 + 3. \quad 6 = 4 + 2 \text{ u. s. w.}$$

II. Wann zwei Grössen einer dritten gleich sind, so sind sie einander selber gleich.

3. E.
$$\begin{array}{l} 6 = 4 + 2 \\ 6 = 5 + 1 \end{array}$$

folglich $5 + 1 = 4 + 2.$

III. Wenn man gleiches zu gleichem addirt, so kommt gleiches heraus; 3. E.

$$\begin{array}{l} 8 = 6 - 2 \\ 4 = 4 \end{array}$$

$$8 + 4 = 6 + 2 + 4.$$

IV. Wenn man gleiches von gleichem sub-

tra-

trahirt, so bleibt gleiches übrig. Z. E.

$$9 = 7 + 2$$

$$6 = 6$$

$$9 - 6 = 7 + 2 - 6.$$

V. Wenn man gleiches mit gleichem multiplicirt, so kommt gleiches heraus. Z. E.

$$4 = 3 + 1$$

$$2 = 2$$

$$4 \cdot 2 = (3 + 1) \cdot 2$$

VI. Wenn man gleiches mit gleichem dividirt, so kommt gleiches heraus; z. E.

$$8 = 6 + 2$$

$$4 = 4$$

$$8 : 4 = (6 + 2) : 4.$$

VII. Was grösser oder kleiner ist als die eine von zwei gleichen Grössen, das ist auch grösser oder kleiner als die andere. Z. E.

$$6 = 5 + 1$$

$$2 < 6$$

$$2 < 5 + 1.$$

Dies sind beynahe die vornehmsten Grundsätze, welche viel hundertmal bey dem Calculiren vorkommen, und worauf die wichtigsten Entdeckungen beruhen. Z. E. bey dem S. 5 angeführten Problem, nach welchem man zwey Zahlen finden soll, deren Summe 5, und deren Differenz 1 ist, wer

werden sogleich fünf von unsern Grundsätzen angewandt. Unerachtet die Aufgabe im Kopf leichter ausgerechnet ist, so wollen wir doch die Anwendung der obigen Regeln dabey zeigen, damit die Leser einen vorläufigen Begriff davon bekommen. Die zwei gesuchten Zahlen sollen x und y seyn; so wird nach Maßgab des Problems seyn

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \text{ und} \\ x - y &= 1 \text{ folglich} \end{aligned}$$

$$2x = 6 \text{ Can. III.}$$

$$: 2 \text{ Can. VI.}$$

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ \text{und wiederum} \end{aligned}$$

$$x + y = 5$$

$$x - y = 1$$

$$2y = 4 \text{ Can. IV.}$$


$$: 2 \text{ Can. VI.}$$

$$y = 2$$

Die zwei gesuchte Zahlen sind also 3 und 2. So leicht nun dieses Exempel an und vor sich selbst ist; so wird man doch begreifen, daß es unzählich viel andere giebt, die man gewiß im Kopf nicht ausrechnen kann, und bey denen daher der Nutzen von den anzuwendenden Grundsätzen ungleich grösser ist.

§. 10. Endlich hat man noch auf drey Erklärungssätze zu merken, welche in den nachstehenden

Hauptsätze
von der Ähn-
lichkeit,
Gleichheit
und Congru-
enz.

thematischen Wissenschaften mehr als son-
sten vorkommen, wiewohl sie eigentlich
zur Ontologie gehören. Ich meine den
Satz der vollkommenen Uebereinstim-
mung, den Satz der Gleichheit, und
den Satz der Ähnlichkeit. Zwo Sa-
chen sind einander ähnlich, wenn man sie
durch nichts als durch die Grösse unter-
scheiden kann; oder wenn in beeden alles
einerley ist, ausgenommen die Grösse.
So kann der Sohn dem Vater vollkom-
men ähnlich seyn, ungeachtet jener noch
ein Kind und dieser ein Mann ist, folg-
lich beede an der Grösse weit unterschies-
den sind. Ein Gemälde im Kleinen, wenn
es kaum einen Zoll hoch ist, kann einer
sechschuhigten Person ähnlich seyn, un-
erachtet die Grösse beiderseits noch einen
beträchtlichen Unterschied macht. Alle
Cirkel sind deswegen einander ähnlich,
oder ein kleiner Cirkel siehet einem grössern
vollkommen ähnlich, wie ein kleines o ei-
nem grossen ähnlich ist. Z. E. o  O.
Denn wenn ich das kleinere o durch ein
Vergrößerungsglas ansehe, so wird es
dem grössern vollkommen gleich werden.
Nunmehr wird man leicht begreifen,
daß alle diejenige Sachen einander ähn-
lich seyen, welche durch nichts als blos
durch die Grösse von einander unterschies-
den werden. Das ist der Satz des Ähn-
lichen. Nach dem Satz der Gleichheit
werden

werden solche Dinge mit einander verglichen, die blos in der Grösse mit einander übereinkommen, sonst aber von einander unterschieden seyn können, wie sie immer wollen. Wann ich einen Bogen Papier in allerhand Figuren zerschneide, z. E. in Dreyecke, in Vierecke, in Fünfecke, u. s. w. und hernach sie auf eine andere Art zusammen setze: so ist, wenn nichts davon verlohren geht, die Summe aller dieser Theile, oder die daraus zusammengesetzte neue Figur, dem vorigen Bogen Papier vollkommen gleich, und nimmt wieder eben so viel Platz ein, als vorhin, unerachtet eine grosse Unähnlichkeit heraus kommt. So giebt es auch Dinge, die dem Werth nach einander gleich sind, ob sie schon in allen andern Stücken höchst unähnlich sind. Z. E. eine Ducat ist jezo dem Werth nach fünf Gulden Silbergeld gleich, unerachtet sonst zwischen einer Ducat und fünf Gulden Münz nichts ähnliches gefunden wird. Hieraus nun erhellet zur Genüge, was eigentlich der Satz der Gleichheit seye; ein Satz, der in der Mathematik einen allgemeinen Nutzen hat. Endlich ist noch der Satz der völligen Uebereinstimmung oder Congruenz zu erklären übrig. Sachen oder Figuren, welche gleich und ähnlich sind, congruiren. Z. E. Zwo Ducaten von einem Schlag, zwey rechtwinklichte Vierecke

Gleichwichtige Folgen aus diesen Sätzen.

von gleicher Länge und Höhe, sind in der Mathematik congruent oder vollkommen übereinstimmend, das ist, beedes gleich und ähnlich. Diß sind nun die vornehmste Grundsätze, die man sich bekannt machen muß, wenn man in dieser Wissenschaft sich mit Nutzen umsehen will. Die daraus gezogene Folgen sind nicht weniger fruchtbar. Wenn zum Exempel von gleichen Sachen die Rede ist, so darf man allemal gleiches für gleiches setzen oder substituiren; Ist die Rede von ähnlichen Dingen, so kann man abermal ähnliches für ähnliches setzen, u. s. w. je nachdeme eine leichtere Rechnung oder sonst ein Vortheil im Calculiren daraus zu ersehen ist. Denn wie man für eine Ducat ihren Gehalt an Silbermünzen setzen darf, so darf man mit gleichem Recht, z. E. für ein irregulaires Viereck ein regulaires, das aber gleich groß ist oder gleich viel Platz einnimmt, setzen; u. s. w. Diese Substitutionen nun haben einen unbeschreiblichen Nutzen, und helfen oft die schwerste Aufgaben ungemein erleichtern, wie wir zu seiner Zeit aus der Erfahrung es lernen werden.

§. 11. Wir haben das nöthigste, und dasjenige, was wir in der Einleitung sagen wollten, ausführlich gesagt. Nun bleibt nichts übrig, als daß wir zum Werk selbst

selbst schreiten. Fleiß, Nachdenken und Aufmerksamkeit sind diejenige Eigenschaften, die ein Liebhaber der Mathematik zu dieser Arbeit mitbringen muß. Hat ihm die göttliche Vorsehung noch über das eine vorzügliche Fähigkeit und besonders einen scharfsinnigen Witz verliehen; so wird er dieser Wissenschaft vor andern Ehre machen. Dann je grösser der Witz oder die angebohrne Fähigkeit ist, verschiedene Verhältnisse, Aehnlichkeiten, und Gleichheiten einzusehen und zu entdecken; desto weiter wird man es in der Mathematik bringen können. Ja der Fleiß selbst, den man darauf wendet, wird nach und nach die auch nicht so gar fähige Köpfe ermuntern, und die Scharfsinnigkeit des Witzes gleichsam beleben und erwecken. Da nun diese Gabe des Verstandes bey allen nur möglichen Wissenschaften höchst vortheilhaft ist; so siehet man aufs neue, wie und warum die Mathematik eine Vorbereitung zu allen höhern Disciplinen heissen könne. Ich habe daher geglaubt, meinen Lesern und Zuhörern nicht mißfällig zu werden, wenn ich nach diesem Hauptzweck die erste Gründe der Mathematik abhandle, und bey allen Gelegenheiten zeige, wie die Kräften der Seele dadurch geschärft werden. Dann unerachtet diese Arbeit nicht

Was ein Liebhaber der Mathematik für Eigenschaften haben müsse; und wie diese Wissenschaft auch mittelmächtige Köpfe bessern könne.

neu ist, so ist sie doch auch nicht so gemein, daß man sich über die Menge der Bücher, welche die Mathematik nach unseren Absichten vortragen, einigen massen beschweren könnte.



Inhalt der Arithmetik.

§. 12.

Die Arithmetik oder Rechenkunst ist Erklärung
eine Wissenschaft, aus bekannten der Arithme-
Zahlen andere unbekannte zu fin- tik.
den, deren Verhältniß zu den bekannten
gegeben wird. Da sie sich nun mit den
Zahlen beschäftigt, es mögen hernach
die gewöhnliche Zahlzeichen, oder in der
Buchstabenrechnung die Buchstaben seyn;
so wird sie

I. Die Zahlzeichen recht aussprechen
lehren;

II. Zeigen, was man für Veränderun-
gen mit ihnen vornehmen könne, nem-
lich die Vermehrung und die Vermin-
derung: da dann

1) die Vermehrung

a) durch die Addition,

b) durch die Multiplication;

2) die Verminderung

a) durch die Subtraction,

b) durch die Division geschieht.

III. Von den verschiedenen Verhältnissen
der Zahlen handeln, und zwar

1) von den Verhältnissen zweyer
Zahlen, in so fern eine theils gröf-
ser ist als die andere, theils in

24 Inhalt der Arithmetik.

so fern eine in der andern endlichmal enthalten ist; folglich von den sogenannten Brüchen, und den auf sie angewandten vier Rechnungsarten.

2) Von den Verhältnissen mehrerer Zahlen gegeneinander, das ist

a) von den Proportionen, welche in der Gleichheit zweyer Verhältnisse bestehen,

b) von der daraus fließenden Regel detri und andern Regeln ic.

c) von den verschiedenen Progressionen.

3) Von der Verhältniß der Wurzeln gegen ihre Dignitäten oder Potenzen, und zwar

a) von den Quadratwurzeln und Zahlen,

b) von den Cubicwurzeln und Zahlen,

c) von höhern Dignitäten oder Potenzen,

d) von Irrationalgrößen; wie auch von unreinen quadratischen Gleichungen ic.

e) von der Anwendung dieser Regeln auf bestimmte und unbestimmte Aufgaben.

I. Cap.

Von dem Numeriren oder Aussprechen der Zahlen.

§. 13.

Weil die Arithmetik aus bekannten Wörtern man Zahlen andere unbekannte erfunden lehrt; so ist vor allen Dingen rithmetischen nöthig, daß man wisse, wie man die Zahlen recht lesen und aussprechen solle. Wir Sprache der haben zwar die Hauptregeln von der mathematischen Sprache in der Einleitung schon vorgetragen; allein es hat ein jeder Theil der Mathematik seine eigene Ausdrücke und Characteres: daher erfordert wird, daß man auch diese insbesondere zu verstehen sich Mühe gebe. Was nun das Aussprechen der Zahlen betrifft, so halten wir uns disfalls an die uns übliche und gewöhnliche wiewohl willkührliche Zahlzeichen. Sie theilen sich in einfache und zusammengesetzte; die einfache gehen von eins bis neune, die zusammengesetzte fangen mit der zehnten Zahl an, und können hernach durch verschiedene Verbindungen der einfachen Zeichen theils untereinander selbst, theils mit den Nullen, wie wir sogleich zeigen wollen, in das Unendliche fortgezählet werden.

26 Arithm. I Cap. Vom Numeriren

Warum die
Zahlzeichen
willkürlich
seyen.

Von der
Leibnizischen
Dyadik.

§. 14. Wie die Zeichen selbst willkürlich sind, so ist auch die Zahl der einfachen Zeichen willkürlich gewesen. Dann wie man von eins bis zehn zählt, so könnte man eben so wohl von eins bis sechs, viere, drey, oder gar nur bis zwey zählen, und alsdann sogleich zusammengesetzte Zeichen gebrauchen. Diese letztere Art, wenn man nur bis zwey mit einfachen Zeichen zehlet, bekam von dem Herrn v. Leibniz den Namen der Dyadik. Man braucht dazu nicht weiter als ein einiges Zahlzeichen und eine Null. Das Zahlzeichen, welches die Einheit in eigentlichem Verstande ausdrückt, ist das gewöhnliche Zeichen von eins nemlich 1. Wenn man also zwey schreiben will, so muß man diejenige Verbindung von 1 und 0 gebrauchen, welche in den ordentlichen Zahlen zehn bedeutet. Z. E. wenn man einen Versuch wagen will, so wird man, weil alles auch hier auf die Stellen, wo die Zeichen stehen, anzukommen pflegt, folgende Tabelle leicht verstehen:

Dyadik. gewöhnliche Zahlen.

I	I
10	2
11	3
100	4
101	5

oder Aussprechen der Zahlen 27

110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15
10000	16 u. f. w.

Da man nun gleich aus diesem Exempel Ihre Vor-
 begriff, daß eine grosse Zahl einen un- theile und ih-
 gleich grössern Raum nach der Dyadik re Schwierig-
 einnehmen würde, als sie nach den ge- teiten.
 wöhnlichen Zahlzeichen einnimmt, und
 hernach bey starken Rechnungen durch
 die Menge der abwechselnden Einser und
 Nullen eine Verwirrung entstehen könnte:
 so behält man lieber die gewöhnliche
 Rechnung bey; obschon in andern Stuf-
 fen die Dyadik mehr Vortheile hat, und
 man z. E. bey derselben das vielen so be-
 schwerlich fallende Einmaleins zu lernen
 gar nicht genöthiget ist. Allein diese Be-
 schwerlichkeiten lassen sich auch auf andere
 Wege vermeiden, wie wir an seinem Ort
 zeigen werden. So viel merken wir in-
 zwischen noch an, daß Herr v. Leibniz Wie man
 seine Dyadik zu einiger Erläuterung der durch die
 Schöpfung aus nichts mit vielem Wiß an-
 ge-
 ges.

28 Arithm. I. Cap. Vom Numeriren

Dyadik die
Schöpfung
aus Nichts
erläutert
habe.

gewendet, und seine Gedanken auf einer Münze, worauf etliche Rechnungsproben nach der Dyadik geprägt waren, mit folgender Inschrift erläutert hat:

Omnibus ex nihilo ducendis sufficit unum,
oder

Alles aus nichts zu schaffen, ist schon die Einheit genugsam.

Denn wenn ich nur Eins und Null habe, so kann ich nach der Dyadik alle nur mögliche Zahlen schreiben, sie mögen hernach noch so groß seyn, als sie immer wollen.

Warum man
mit den ein-
fachen Zahl-
zeichen nur
bis auf zehn
zähle,

§. 15. Wir bleiben aber jezo bey den gewöhnlichen Zahlzeichen stehen. Man zehlet von undenklichen Zeiten her von eins bis zehen; vermuthlich weil die Menschen anfänglich an ihren zehen Fingern das, was sie zählen wollten, hergezehlet haben. Die einfache Zahlzeichen gehen von eins bis neune, und sind folgende: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Sie werden einfache Zeichen genennet, weil sie als solche für sich allein, und weder unter sich noch mit andern verknüpft stehen; man heisset sie auch Einheiten, nicht zwar in Ansehung ihrer selbst, dann im eigentlichen Verstand ist nur der Einsler eine Einheit, sondern in Ansehung der folgenden Zehner, Hunderter u. s. w. Was also kleiner ist als ein Zeh-

und wie ferne
diese einfache
Zahlzeichen
Einheiten
genennet
werden.

oder Aussprechen der Zahlen.

Zehener, das wird unter dem Namen der Einheiten begriffen.

§. 16. Nun fragt sich aber, wie man es denn mache, wenn man zehen schreiben wolle? Wir haben kein einfaches Zeichen mehr, diese Zahl auszudrücken. Folglich muß man hier auf eine Verbindung der Zeichen denken. Nun giebt es eine doppelte Verbindung: dann entweder kann ich sagen: Zehen ist $6 + 4$; oder ich kann ohne ein solches Verbindungszeichen den Werth der einfachen Zahlen aus den Stellen und Plätzen, die sie einnehmen, bestimmen; und dazu sind die Nullen dienlich, welche an und für sich nichts bedeuten, in der Verbindung aber mit den einfachen Zahlen, den ihnen vorgesezten Einheiten, durch den Rang, den sie ihnen lassen, einen wirklich höhern Werth belegen. Folglich wenn man dem Einsers eine Null nachsetzt, so wird er schon einen höhern Werth bekommen. Dieser Werth nun des Einsers, der die zweite Stelle zur Linken einnimmt, ist zehenmal so groß, als er in der ersten Stelle zur Rechten war. Warum er gerade zehensmal, und in der dritten Stelle zehenmal zehenmal, oder hundertmal grösser seye, werden wir an seinem Ort, wenn wir von den Regeln der Combinationen handeln, ausführlich erweisen. Bis dahin kann man also die Sache nur historisch behal-

Wie man es mache, wenn man eine Zahl, die grösser als Neune, Zehen u. s. w. ist, schreiben solle.

Nutzen der sogenannten Nullen.

behalten. Der Ausdruck 10 wird demnach zehen bedeuten. Eben so wird der Zweyer in der zwenten Stelle gleichfalls zehenmal so groß als er in der ersten Stelle war, darum bedeutet der Ausdruck 20 so viel als zwanzig; der Neuner wird in der zwenten Stelle gleichfalls zehenmal so groß als er vorhin war; folglich wird 90 so viel als neunzig, 91 so viel als ein und neunzig, und 99 so viel als neun und neunzig, heißen. Hieraus ist klar, daß diese zweyfache Verbindung bis auf hundert fortgehe; wenn man aber hundert schreiben will, so muß der Einsfer abermal um eine Stelle weiter gegen die Linke gerückt werden, und dann bedeutet er wiederum zehenmal so viel als in der zwenten, und hundertmal so viel als in der ersten Stelle. Dieses nun zu bewerkstelligen, brauchet man, wie man leicht einsieht, drey Zahlzeichen, weil der Einsfer die dritte Stelle zur Linken einnehmen muß: folglich wird der Ausdruck 100 hundert anzeigen; wie z. E. der folgende Ausdruck 192 hundert neunzig zwen, oder hundert und zwen und neunzig bedeutet. Diese dreyfache Verbindung gehet nun bis auf tausend fort; was aber über tausend hinaus ist, dazu braucht man aus obigem Grunde schon vier Zahlzeichen oder eine vierfache Verbindung; was über zehntausend hinausgeht, er-

for-

fordert eine fünffache, was über hundert; Warum bey
tausend eine sechsfache, was über taus den Zehnern
sendmal tausend ist, eine siebentfache Ver zwey, bey den
bindung u. s. w. Die Ursache davon ist Hundertern
leicht begreiflich. Dann weil allemal drey, bey den
diejenige Zahl, die zehenmal so groß ist Tausendern
als die unmittelbar vorhergehende, eine Stelle weiter zur Linken erfordert, folg vier Zahlzei
lich die Stellen selbst in die Decimalpro gression fortgehen, so müssen bey zehen chen u. s. w.
zwey, bey hundert oder zehenmal zehn nöthig seyen.
drey, bey tausend oder zehenmal hundert
vier Zahlzeichen mit einander verbunden
werden.

§. 17. Die Erfindung dieser Rech nung wird insgemein den Arabern zuge schrieben. Sie mag aber herkommen, Nutzen und
wo sie will, so zeuget sie von einem frucht Artigkeit
baren Wiß. Das Wißige besteht darin: dieser Erfin
nen, daß die Erfinder auf den Einfall ge dung.
rathen, den Werth der Zahlzeichen nach
dem Rang oder Plaz zu bestimmen,
den sie neben den übrigen einnehmen und
bekleiden. Wie aber nicht alles Wißige
zugleich so gemeinnützig und brauchbar ist,
so müssen wir auch zeigen, wie fruchtbar
diese Erfindung seye. Die Bestimmung
des Werths in den Stellen nach der
zehnfachen oder Decimalprogression giebt
der Rechnung eine gewisse Einförmigkeit,
und verhütet alle sonst zu befürchtende
Verwirrungen. Hernach ist diese Art zu
rech,

behalten. Der Ausdruck 10 wird demnach zehen bedeuten. Eben so wird der Zwenyer in der zwenten Stelle gleichfalls zehenmal so groß als er in der ersten Stelle war, darum bedeutet der Ausdruck 20 so viel als zwanzig; der Neuner wird in der zwenten Stelle gleichfalls zehenmal so groß als er vorhin war; folglich wird 90 so viel als neunzig, 91 so viel als ein und neunzig, und 99 so viel als neun und neunzig, heißen. Hieraus ist klar, daß diese zweyfache Verbindung bis auf hundert fortgehe; wenn man aber hundert schreiben will, so muß der Einsfer abermal um eine Stelle weiter gegen die Linke gerückt werden, und dann bedeutet er wiederum zehenmal so viel als in der zwenten, und hundertmal so viel als in der ersten Stelle. Dieses nun zu bewerkstelligen, brauchet man, wie man leicht einseheth, drey Zahlzeichen, weil der Einsfer die dritte Stelle zur Linken einnehmen muß: folglich wird der Ausdruck 100 hundert anzeigen; wie z. E. der folgende Ausdruck 192 hundert neunzig zwen, oder hundert und zwen und neunzig bedeutet. Diese dreyfache Verbindung gehet nun bis auf tausend fort; was aber über tausend hinaus ist, dazu braucht man aus obigem Grunde schon vier Zahlzeichen oder eine vierfache Verbindung; was über zehntausend hinausgeht, erfor-

for

fordert eine fünffache, was über hundert: Warum bey
tausend eine sechsfache, was über taus: den Zehnern
sendmal tausend ist, eine siebenfache Ver: zwey, bey den
bindung u. s. w. Die Ursache davon ist Hundertern
leicht begreiflich. Dann weil allemal drey, bey den
diejenige Zahl, die zehenmal so groß ist Tausendern
als die unmittelbar vorhergehende, eine Stelle weiter zur Linken erfordert, folg: vier Zahlzei
lich die Stellen selbst in die Decimalpro: chen u. s. w.
gression fortgehen, so müssen bey zehen nöthig seyen.
zwey, bey hundert oder zehenmal zehn
drey, bey tausend oder zehenmal hundert
vier Zahlzeichen mit einander verbunden
werden.

§. 17. Die Erfindung dieser Rech: Nutzen und
nung wird insgemein den Arabern zuge: Artigkeit
schrieben. Sie mag aber herkommen, dieser Erfin
wo sie will, so zeuget sie von einem frucht: dung.
baren Wiß. Das Wißige besteht darin: den, daß die Erfinder auf den Einfall ge
rathen, den Werth der Zahlzeichen nach
dem Rang oder Platz zu bestimmen,
den sie neben den übrigen einnehmen und
bekleiden. Wie aber nicht alles Wißige
zugleich so gemeinnützig und brauchbar ist,
so müssen wir auch zeigen, wie fruchtbar
diese Erfindung seye. Die Bestimmung
des Werths in den Stellen nach der
zehnfachen oder Decimalprogression giebt
der Rechnung eine gewisse Einförmigkeit,
und verhütet alle sonst zu befürchtende
Verwirrungen. Hernach ist diese Art zu
rech:

32 Arithm. I. Cap. Vom Numeriren

Ihr Vorzug
vor den ma-
thematischen
Verbindungs-
zeichen.

Warum aber
dennoch die
Mathematis-
tikerverständi-
ge bey ihren
gewöhnlichen
Zeichen blei-
ben.

rechnen so beschaffen, daß man mit wenig Zeichen grosse Zahlen schreiben kann; welches man durch die mathematische Verbindungszeichen nicht bewerkstelligen könnte. Denn wenn man diesen Localwerth in Fortrückung der Zahlzeichen nicht eingeführt hätte; so würde man, nur die Zahl hundert zu schreiben, eine solche Menge Zahlzeichen durch das Zeichen + verbinden müssen, daß man sie kaum auf einmal überschauen könnte. Z. E. Zehen ist zwar $6 + 4$, und bald geschrieben; aber zwanzig braucht schon mehr; z. E. $6 + 4 + 8 + 2$. oder $9 + 9 + 2$. u. s. w. Man könnte zwar auch einen andern Weg einschlagen, und z. E. die Multiplication dazu gebrauchen: dißfalls wäre hundert $= 9. 9 + 2. 9 + 1$. Jedermann aber siehet selbst, daß diese Art zu zehlen und die Zahlen zu schreiben bey weitem nicht so schicklich, bequem und artig sey als diejenige, die bereits eingeführt ist. Warum aber nichts desto weniger die Mathematikverständige, als welche mit solchen Rechnungen sich nicht oft abgeben, und lieber die Aufgaben in allgemeinen Formeln auflösen, bey ihrer Weise zu bleiben Ursache genug haben, werden wir an seinem Ort zeigen. Uebrigens erhellet der Nutzen dieser Erfindung in genannten Zahlen zur Genüge. Es dünket mich daher weit ungezwungener zu seyn, wenn man

man auch im Lateinischen, statt der römischen, unsere Zahlzeichen gebraucht. Dann die alte Römer würden gewis ihre eigene ausgemustert und die heut zu Tag übliche angenommen haben, wenn sie ihnen bekannt gewesen wären. Das einzige ist bey dieser Erfindung noch anzumerken, daß, da die Zahlzeichen zur linken Hand des Lesers einen größern Wehrt als die zur Rechten bekommen, vermuthlich die Bequemlichkeit im Schreiben diesen Rang bestimmt haben mag. Wies wohl die Zahlzeichen in Ansehung ihrer selbst untereinander so geordnet sind, daß die vornehmere oder mehr bedeutende allzeit den geringern zur Rechten stehen, wie es der Augenschein leicht geben wird.

§. 18. Die Zahlen werden also von der Rechten zur Linken so geschrieben, daß das letzte Zahlzeichen zur Rechten des Lesers die Einheiten, das nächste zur Linken, die Zehner, das dritte die Hunderter, das vierte die Tausender anzeige u. s. w. Wenn man also die Zahl 7356428 aussprechen soll; so darf man nur von hinten anfangen und sagen, es sind acht Einheiten, zweyen Zehner, vier Hunderter, sechs Tausender, fünf Zehntausender, drey Hunderttausender, sieben Tausendmaltausender, oder sieben Millionen. Weil aber diese Art, die Zahlen auszusprechen, et-

Von der Ordnung, nach welcher die Zahlzeichen aufsteigen; und wie man anfänglich sich bey dem Lesen helfen solle,

34 Arithm. I. Cap. Vom Numeriren

Einige Mittel, geschwin-
der und ferti-
ger lesen zu
lernen.

was weitläufig ist ; so fangt man , um sich kürzer auszudrücken , lieber von vornen an , und sagt sieben Millionen , dreyhundert und sechs und fünfzig tausend , vierhundert und acht und zwanzig. Da nun bey grossen und langen Reihen von Zahlen die Aussprache oder das Lesen etwas schwerer fällt , und man doch die Kürze beybehalten will ; so pflegt man je drey und drey Zahlen mit einem Strichlein oder andern Zeichen zu bemerken , weil man doch drey Zahlzeichen neben einander auf einmal leicht übersehen und aussprechen kann ; braucht aber , um sich nicht zu verwirren , die Vorsicht dabey , daß man das dritte Zahlzeichen , von der rechten Hand an gerechnet , mit einem Strichlein von unten , das sechste mit einem Strichlein von oben , das neunte abermal mit einem Strichlein von unten , das zwölfte mit zwey Strichlein von oben , das fünfzehende wiederum mit einem Strichlein von unten , das achtzehende mit drey Strichlein von oben u. s. w. bezeichnet : da dann nach einem Strichlein von oben die Millionen , nach zwey Strichlein die Billionen , nach drey Strichlein die Trillionen u. s. w. anfangen. Nach dem untern einfachen Strichlein fangen jederzeit die Tausender entweder der Einheiten , oder der Millionen , oder der Billionen u. s. w. an. Z. E. die
Zahl

///

||

/

Zahl 9842, 346 982, 751482, 658 wird nach Maßgab der benzesetzten Strichlein ausgesprochen: Neun Trillionen, acht, hundert und zwen und vierzig tausend, drehhundert und sechs und vierzig Billio- nen, neunhundert und zwen und achtzig tausend, siebenhundert und ein und fünfzig Millionen, vierhundert und zwen und achtzigtausend, sechshundert und acht und fünfzig.

§. 19. Wir haben bey diesem Exempel ^{Wie man die} mit Fleiß keine Nullen angebracht, weil Nullen anzu- ^{wir von dem Nutzen und Gebrauch der= sehen habe,} wir von dem Nutzen und Gebrauch der= ^{selben vorher was sagen müssen. Es ist} selben vorher was sagen müssen. ^{aus §. 16. klar, daß die Nullen, uner-} Es ist ^{achtet sie für sich selbst nichts bedeuten, in} und warum ^{gewissen Fällen einen wahren Nutzen ha-} sie oder ande- ^{ben, wenn sie nemlich dem Zahlzeichen in} re dergleichen ^{der folgenden Stelle seinen Rang und zu-} für sich nichts ^{gleich seinen Werth geben müssen. Z. E.} bedeutende ^{man kann die Zahl zwanzig nicht ohne} Zeichen bey ^{Nullen schreiben: dann 2 allein ist zu we-} dieser einge- ^{nig; der Zweyer muß eine Stelle weiter} führten Rech- ^{fortrücken; und 21 ist zuviel: folglich} nung nöthig ^{bleibt mir nichts übrig, als daß ich ent-} seyen. ^{weder eine Null oder ein anderes Zeichen,} ^{das weiter nichts als die Stelle und den} ^{Rang seines Nachbars andeutet, dazu} ^{gebrauche. Nun hätte man statt der so-} ^{genannten Nullen etwa Sternlein oder} ^{andere Zeichen einführen und sagen können:}

36 Arithm. I. Cap. Vom Numeriren

2^* soll zwanzig, und 2^{**} soll zweihundert u. s. w. ausdrücken. Man hat aber seit langen Zeiten schon die Nullen oder Zypfras, wie sie lateinisch, oder Zero, wie sie französisch heißen, zu diesem Ende eingeführt, welche folglich die leere Stellen ausfüllen, und zugleich den zur Linken folgenden Zahlzeichen ihren Werth bestimmen. Darum schreibt man zwanzig durch den Ausdruck 20, und zweihundert durch den Ausdruck 200, u. s. w.

Wie man ein
Exempel, wo
viele Nullen
vorkommen,
fertig lesen
und schreiben
kann.

§. 20. Wenn man also von einem verlangte, er sollte die Zahl sechs Millionen und sechs und neunzig schreiben, so wird er am besten zurechte kommen, wenn er den Anfang zu schreiben bei den Einheiten macht, und sagt: es sind sechs Einheiten, neun Zehner, kein Hunderter, kein Tausender, kein Zehntausender, kein Hunderttausender, aber sechs Tausendmaltausender oder sechs Millionen da; folglich sieht die geschriebene Zahl also aus: 6000096. Eben so läßt sich auch eine geschriebene Zahl, woben Nullen vorkommen, leicht aussprechen, wenn man nur die Regel §. 18 dazu nimmt, und die Strichlein gehörig anbringt. Z. E. die

Zahl 20034,000056,002 heißt zwanzig Billionen, vier und dreißig Millionen, sechs und fünfzig tausend und zwei.

oder Aussprechen der Zahlen. 37

§. 21. Wir haben von Millionen, Billionen und Trillionen geredet, und noch nicht hinlänglich erklärt, was sie seyen. Diese Namen erfordern also noch eine Beleuchtung. Was im deutschen tausend, maltausend ist, das nennen die Franzosen sehr fügllich eine Million, und tausendmal tausend Millionen eine Billion, tausendmal tausend Billionen eine Trillion u. s. w. Folglich gehen die Millionen, Billionen, Trillionen u. s. w. von sechs zu sechs Zahlzeichen fort; das ist, nach dem sechsten Zahl- oder Rangzeichen, wenn es Nullen sind, fangen die Millionen an, nach dem zwölften die Billionen, nach dem achtzehenden die Trillionen; nach dem vier und zwanzigsten die Quadrillionen u. s. w. Die Deutschen haben diese Namen von den Franzosen um so eher angenommen, weil sie nicht nur keine eigene haben, sondern auch durch die öftere Zusammensetzung der tausendmal tausendmal tausend u. s. w. unvermeidliche Verwirrungen entstehen könnten. Nunmehr haben wir alles, was von der Aussprache der Zahlen zu wissen nöthig ist, umständlich beschrieben. Eines könnte noch hinzu gesagt werden. Es giebt Leute, welche, um einen auf die Probe zu setzen, je und je gewisse Zahlen anders aussprechen, als sie ordentlicher Weise geschrieben werden, und hernach verlangen, man

Was man unter den Worten Millionen und Trillionen verstehe?

Nutzen dieser Wörter.

38 Arithm. I. Cap. Vom Numeriren.

solle sie an einem fort niederschreiben. Hieher gehöret die Aufgabe, man solle Eilftausend Eilfhundert und Eilf schreiben. Diese Zahl läßt sich nicht ohne die Addition in einem fort schriftlich ausdrücken. Man schreibt also zuerst 11000
hernach 1111

und addirt beede Zahlen 12111, da dann Zwölftausend Einhundert und Eilf herauskommt, welche Zahl der obigen vollkommen gleich ist. Solche Exempel nun lassen sich durch das angeführte Mittel bald auflösen; wiewohlen sie in keiner andern Absicht angebracht werden, als etwa einen zu überraschen und schnell zu prüfen. Allein es sind neben dem sehr grosse Kleinigkeiten; und wenn einer auch nicht sogleich darauf antworten könnte, so darf er sich eben nicht schämen, woferne er nur das wesentliche und gründliche recht weiß, und wie die Mathematik überhaupt also auch die Arithmetik nach derjenigen Absicht gebrauchet, nach welcher sie gegenwärtig vorgetragen wird.



Zweytes Capitel.

Von der Vermehrung und Verminderung der Zahlen, oder von den vier Rechnungsarten, welche sonst die vier Species genannt werden.

§. 22.

Eine Zahl kann man, wie die Grössen Wie man die überhaupt, als eine Menge von Zahlen anzusehen habe.
Theilen ansehen, welche entweder
eigentlich sogenannte Einheiten §. 15. oder
Theile der Einheit sind. Z. E. die
Zahl zehn Gulden bestehet aus Ein-
heiten, deren jede ein Gulden genannt
wird; die Zahl 3 Gulden, bestehet aus
Theilen einer Einheit, die man einen Gul-
den nennet. Folglich hat in der Arith-
metik die Einheit selbst noch eine Grösse,
und ist eigentlich nur eine Verhältniß,
oder wie man zu reden pflegt, keine ab-
solute, sondern blos eine respective Ein-
heit. Nun können alle endliche Grössen Ihre Ver-
vermehrt oder vermindert werden. mehrung
und Vermin-
müssen also von den Zahlen ein gleiches derung;
behaupten. Eine Grösse aber wird ver-
mehrt, wenn man entweder andere von warum eine
gleicher Art, sie mögen hernach grösser jede Zahl auf
oder kleiner seyn, ihr zugiebt; oder wenn eine doppelte
man eben dieselbige Grösse etlichmal zu Weise, nem-
lich durch die

Addition und
Multiplica-
tion, vermeh-
ret werden
können.

Was Grö-
ßen von ei-
nerley Art
seyn.

Wie man sie
nach den
Grundsätzen
der Logik un-
ter einerley
Art oder Be-
nennung
bringen kön-
nen.

sich selbst sehet. Jenes heißt addiren, dieses multipliciren. Z. E. wenn ich zu 4 Gulden 2 Gulden, und wieder 6 Gulden hinzusetze, so addire ich, und bekomme eine GröÙe von 10 Gulden; wenn ich aber 4 fl. etlichmal z. E. drey mal zu sich selbst addire, so multiplicire ich und bekomme eine GröÙe von 12 Gulden. Ich muß aber in beeden Fällen GröÙen von einerley Art haben. Was nun Arten und Gattungen seyn, lernet man in der Logik. Gulden und Ducaten sind von verschiedener Art: wenn ich also 4 Speciesgulden und 3 Species Ducaten habe, so kann ich sie nicht zusammen zählen; dann ihre Summe macht weder bloß sieben Gulden, noch auch sieben Ducaten aus. Allein ich darf nur nach den Regeln der Vernunftlehre einen andern Namen, durch die Bestimmung einer höhern Gattung, welche beeden gemein ist, z. E. den Namen Geld, erfinden, so werde ich alles addiren und sagen können: es sind sieben Stücke Gelds. Auf diese Weise bringt man verschiedene Namen unter einerley Benennung; und diß ist die allgemeine Regel, welche in der Arithmetik, vornemlich bey den Brüchen, nur auf besondere Fälle applicirt wird. Man siehet hieraus, wie die Wissenschaften miteinander zusammenhangen, und wie die Arithmetik nichts an-
ders

ders als die Anwendung der Logik seye. Wir werden bey allen Gelegenheiten diese Verwandtschaft zeigen, und die Regeln vernünftig zu denken auch aus dieser Wissenschaft theils zu vermehren, theils zu erläutern suchen.

§. 23. Die Zahlen werden erstlich Von der Addition der Zahlen. durch die Addition vermehret. §. 22. Wir müssen also umständlich erklären, was die Addition seye. Addiren heißt eine Zahl erfinden, welche verschiedenen andern zusammen genommen gleich ist. Z. E. Drey und vier giebt sieben; die Zahl Sieben ist die erfundene Zahl, welche beeden gegebenen Zahlen Drey und vier zusammen genommen gleich ist. So leicht nun dieses Exempel ist, so giebt es doch ungleich schwerere, wenn nemlich nicht nur viele, sondern auch grosse Zahlen addirt werden sollen. Z. E. 234062 und 5348, und 90023, kann man nicht so schnell im Kopf addiren, als die obige zwey einfache Zahlen. Folglich muß man hier sich einiger Vortheile bedienen, welche das Rechnen erleichtern und in kurzer Zeit auch solche weitläufige Addition beschleunigen können. Diese Vortheile nun bestehen darinnen, daß man nach den Regeln des vorhergehenden Capitels die Theile der grössern Zahlen sich bekannt macht, und hernach alleine.

Wie man die Addition in grössern Exempeln verrichte, und was man für Vortheile dabey anbringen kan.

42 Arithm. II. Cap. Von den

le gleichnamigte Theile, oder Theile, die einerley Benennung haben, nemlich Einheiten zu Einheiten, Zehner zu Zehnern, Hunderter zu Hundertern zusammen zehlt. Diß kann nun am besten geschehen, wenn man die zu addirende Zahlen unter einander schreibt, aber so, daß man von hinten, nemlich von der Classe der Einheiten zu schreiben anfangt; weil manchmalen unter den zu addirenden Zahlen einige bey den Tausendern, andere bey den Zehntausendern, noch andere erst bey den Millionen aufhören, folglich ungleich lang sind: daher wenn man von vornen zu schreiben anfänge, die Einheiten oft unter die Hunderter, die Zehner unter die Tausender u. s. w. zu stehen kommen würden; welches zu grossen Verwirrungen Anlaß geben könnte. Damit man endlich die herauskommende Summe von den Zahlen, welche addirt werden, sogleich unterscheiden kann; so pflegt man einen Querstrich zu ziehen, und unter selbigen erst die Summe zu schreiben. Die Summe heist die gefundene Zahl; welche den zu addirenden zusammengenommen gleich ist. Sie wird auch das Aggregat genannt. Die Zahlen aber, welche addirt werden, heissen die Summirende. Ein Exempel solle die Sache klar machen. Man solle folgende Zahlen addiren:

Warum man bey der Addition die Zahlen von der Rechten zur Linken schreiben, und auch von hinten den Anfang zu addiren machen solle.

Was Summe oder Aggregat, und summirende Zahlen seyen.

$$\begin{array}{r}
 2 \ 3 \ 6 \ 0 \ 4 \ 8 \\
 4 \ 5 \ 3 \ 2 \ 9 \\
 7 \ 8 \ 0 \ 1 \\
 \hline
 2 \ 8 \ 9 \ 1 \ 7 \ 8
 \end{array}$$

Exempel der
Addition in
größern Zah-
len.

So machen wir erstlich den Querstrich; und zehlen die Einheiten *s.* 15. hernach die Zehner, ferner die Hunderter u. *s.* w. zusammen. Nämlich 1 und 9 Einheiten geben 10, und noch 8 dazu geben 18 Einheiten, das sind 8 Einheiten und ein Zehner, folglich setzt man 8 Einheiten in die letzte Classe zur Rechten, und behält den Zehner für die zweite Stelle; da man dann wieder sagt 4 und 2, und ein von der ersten Classe übrig behaltener Zehner geben 7 Zehner; diese setzt man in die zweite Stelle. Nun kommen die Hunderter, nämlich acht und drey Hunderter, die zusammen eils Hunderter, folglich einen Tausender und einen Hunderter ausmachen; daher setzt man einen Hunderter in die Stelle der Hunderter, und den Tausender behält man für die folgende Classe. Die vierte Stelle enthält die Tausender: da man nun in den summirenden Zahlen 7 und 5 und 6 Tausender ausgedruckt und noch einen Tausender von der vorigen Classe übrig hat; so wird ihre Summe 19 Tausender, das ist 9 Tausender, und einen Zehntausender geben; den Zehntausender behält man

man für die folgende Classe, und setzt unter den Querstrich nur 9 Tausender. Die fünfte Stelle ist die Stelle der Zehentausender, deren haben wir in dem vorgeschriebenen Exempel nur 3 und 4, und einen von der vorigen Classe übrig gebliebenen Zehentausender; folglich in allem 8 Zehentausender, die man unter den Querstrich setzt. Nach diesen folgen die Hunderttausender, welche an der Zahl zwey sind, und, da weder die übrige summirende Zahlen so weit gehen, noch auch von den vorigen Stellen was übrig geblieben ist, schlechterdings unter den Querstrich zu äusserst zur Linken gesetzt werden. Die ganze Summe heisset demnach zwey hundert und neun und achtzigtausend, einhundert und acht und siebenzig.

Beweis der
Addition.

§. 24. Daß nun dieses die richtige Summe seye, lästet sich leicht beweisen. Dann wann die gefundene Zahl den gegebenen Zahlen zusammengenommen gleich ist, so hat nach §. 23. die Sache ihre Richtigkeit. Da nun das Ganze seinen wirklichen Theilen zusammengenommen gleich ist, und wir in dem vorgegebenen Exempel alle vorgeschriebene Einheiten, alle Zehner, alle Hunderter, alle Tausender, u. s. w. aus welchen nemlich die ganze Summe besteht, zusammenzählt

zählt haben, so kann es nicht fehlen, die gefundene Zahl muß den obigen Zahlen zusammen genommen gleich seyn. Diß ist der Beweis von den Regeln der Addition überhaupt. Nun ist es zwar möglich, daß, wenn man nicht geübt ist, leicht ein Fehler im Zusammenzählen vorgehen kann: daher es rathlich ist, daß man bey wichtigen Exempeln die Rechnung noch einmal durchgeht; welche Wiederholung man eine Probe nennen kann. Man hat zwar eine sogenannte Neuner-Probe, nach welcher man in den summirenden Zahlen und in der Summe gleichviel Neuner wegwirft, und was nach den weggeworfenen Neunern übrig bleibt, mit einander vergleicht. Ist der Rest beiderseits einerley, so hat man nicht gefehlt; ist er aber verschieden, so muß ein Fehler vorgegangen seyn, folglich das Exempel noch einmal gemacht werden. Allein diese Probe ist so beschaffen, daß man bey derselben fast leichter fehlen kann, als bey der Addition selbst; neben dem ist sie auch so weitläufig, daß man weniger Zeit braucht, das Exempel noch einmal durchzugehen, als diese Probe zu machen; welche ohnehin nicht einmal sicher und zuverlässig ist, wenn man bey der Addition selbst nicht fleißig bemerkt hat, wie oft man neune von den für die folgende Stellen aufbehaltenen Zahlen weg-

Was von der
sogenannten
Neunerpro-
be zu halten
seye?

weggeworfen habe. Eine Probe aber, die beschwerlicher und weisläufiger ist als die Operation selbst, die sie probieren solle, neben dem auch den Rechner gleich grosser, ja noch grösserer Gefahr zu irren aussetzet, scheint mir nicht so bequem zu seyn, als die Wiederholung der Rechnung selbst, wenn man ja glaubt, daß man gefehlt habe. Inzwischen kann man sie, weil sie doch eingeführet ist, beibehalten und sich bekannt machen; wiewohl man noch viele andere, und zwar leichtere Proben der Addition, z. E. durch die erst zu erlernende Subtraction, erfinden und angeben könnte, wenn es der Mühe werth wäre, das was an sich so leicht ist, mit andern gleich faßlichen und leichtern Methoden ohne sonderlichen Nutzen zu vervielfältigen. Man muß Zeit und Mühe, so viel möglich ist, bei Kleinigkeiten sparen, wenn man in den Wissenschaften einen gründlichen und schnellen Fortgang bekommen will. Was übrigens die Fertigkeit betrifft, einfache Zahlzeichen zusammen zu zehlen, so überläßt man die ganze Kunst einer fleißigen Uebung. Anfänglich, bis man besser geübt ist, kann man sie an den Fingern zusammen zehlen. Dann es kommen nie auf einmal so viele Zahlzeichen vor, daß man ausser Stande wäre, sie ohne neue Hülfsmittel und Regeln addiren zu können.

Wie man eine Fertigkeit im Addiren bekomme?

können. Die Vortheile, die man zur Fertigkeit im Denken aus dieser ersten Rechnungsart lernen kann, habe ich in meinen Principiis cogitandi Part. pract. C. III. angemerkt.

§. 25. Es ist ohne unser Erinnern klar, daß das gegebene Exempel der Addition Zahlen von einerley Art in sich begreiffe, unerachtet wir die eigentliche Einheiten, z. E. Thaler, Gulden oder Kreuzer, nicht genannt haben: darum heißt auch dieses Addiren ein Addiren in ungenannten Zahlen. Wenn man aber die Einheiten nennt, so addirt man in genannten Zahlen. Wir müssen von dieser Rechnung auch ein Exempel geben, weil es insbesondere eine statliche Vorbereitung zur Buchstabenrechnung heißen kann. Man solle zu

Warum die bisher vorge-
tragene Art
zu addiren
ein Addiren
in ungenann-
ten Zahlen
heisse?

Was die Ad-
dition in ge-
nannten Zah-
len seye?

	3 fl.	5 fr.	3 Hllr.
addiren	2 fl.	58 fr.	5 Hllr.
<hr/>			
so hat man	5 fl.	63 fr.	8 Hllr.

Weil aber 6 Hllr. auf einen Kr. und 60 Kr. auf einen Gulden gehen; so pflegt man schicklicher die Summe der Heller, die einen Kr. ausmachen, in die Stelle der Kreuzer, die Summe der Kr. die einen Gulden ausmachen, in die Stelle der Gulden u. s. w. zu setzen. Dahero obiges Exempel auch folgende Summe giebt,

giebt, welche der vorigen ganz gleich ist: nemlich 6 fl. 4 fr. 2 Hlr. Nur muß man wissen, wie viel Heller auf einen Kr. wie viel Kr. auf einen fl oder in andern Ländern, wie viel Heller auf einen Groschen, wie viel Groschen auf einen Thaler u. s. w. gehen. Eben so muß man das Maas der Früchten u. s. w. inne haben. Allein bey der Buchstabenrechnung hat man dergleichen Kenntniß schon nicht nöthig: man setzet die Einheiten von gleicher Art, zusammen, ohne daß man wissen müßte, wie viel *c* auf ein *b*, wie viel *b* auf ein *a* und so weiter giengen. Wir wollen noch ein Exempel in genannten Zahlen geben, um den Weg zu dieser schweren scheinenden aber in der That leichten Kunst desto besser zu bahnen. Die Zeichen, die man wissen muß, habe ich in der Einleitung erklärt; daher ich hier nichts weiter sagen will, als nur die Leser erinnern, + heiße plus oder mehr, und — heiße minus oder weniger. Wenn aber am Anfang der Zahl gar kein Zeichen stehet, so setzet man allemal im Sinn das Zeichen + oder plus hinzu. Man solle nun addiren:

$$\begin{array}{r} 5 \text{ fl.} + 6 \text{ fr.} - 4 \text{ Hlr.} \\ 2 \text{ fl.} - 2 \text{ fr.} - 1 \text{ Hlr.} \end{array}$$

so hat man 7 fl. + 4 fr. — 5 Hlr.

Dann

Wie die Addition in genannten Zahlen den Weg zur Buchstabenrechnung bahne.

Denn daß 5 und 2 fl. zusammen 7 fl. machen, ist klar. Daß aber + 6 fr. — 2 fr. nicht mehr als + 4 fr. geben, erhellet daher: weil einer, der sechs Kreuzer hat und zweien Kreuzer wieder mangelt, oder zweien Kreuzer davon weggeben solle, eben deswegen nur noch vier Kreuzer übrig behält. Eben so ist endlich auch leicht zu begreifen, daß — 4 Hlr. und — 1 Hlr. zusammen — 5 Hlr. geben; denn wenn einem 4 Heller und wiederum ein Heller fehlen, so fehlen ihm zusammen fünf Heller.

§. 26. Diese Rechnung ist nun der Regeln und ganze Grund von der ersten Operation, Exempel der oder von der Addition, in der Buchstabenrechnung. Man solle z. E. addiren: nach der

$$\begin{array}{r} 5a + 6b - 4c \\ 2a - 2b - c \\ \hline \end{array}$$

Buchstabenrechnung.

so hat man $7a + 4b - 5c$

In welchem Falle a Gulden, b Kreuzer, c Heller, oder was man sonst will, bedeuten können. Auf gleiche Weise bekommt man, wenn man addirt

$$\begin{array}{r} 3a - 8b + 5c - 6d \\ 2a + 3b - 2c - 5d + 3g \\ \hline \end{array}$$

$$5a - 5b + 3c - 11d + 3g$$

D

Dann

50 Arithm. II. Cap. Von den

Dann 2 a und 3 a geben zusammen 5 a ; — 8 b und + 3 b geben — 5 b . Wenn 3. E. b Kreuzer bedeuten, so ist klar, daß einer, der 3 Kreuzer hat und 8 davon weggeben solle, zu Bezahlung seiner Schuld noch 5 Kreuzer zu wenig hat. u. s. w. Die letzte 3 g haben keinen gleichen Namen in der obern Classe, folglich werden sie eben in der Summe besonders gesetzt. Man siehet auch in dieser Rechnung, daß es gleich viel ist, ob man von vornen oder von hinten zu addiren anfangt: weil es hier nicht auf die Stelle der Buchstaben ankommt, oder weil die Stellen der Buchstaben keinen weiteren Werth bestimmen. Nur muß man immer gleiche Buchstaben zusammenzählen, sie mögen hernach stehen, wo sie wollen. Die Addition der Buchstaben ist also wirklich viel leichter als die gewöhnliche Addition in genannten Zahlen S. 23. und die ganze Kunst bestehet darinnen, daß man die Zeichen + und — wohl bemerke, und in der unten gezogenen Summe dasjenige, was gegen einander aufzuheben ist, wie wir gezeigt haben, richtig aufhebe.

Vorteile
der Buchstabenrechnung.

Warum man
nicht so
gleich nach
der Addition
von der Mul-

S. 27. Die andere Art, die Zahlen zu vermehren, heißt die Multiplication S. 22. folglich sollten wir nach der Ordnung jetzt davon handeln. Weil aber in allen mathematischen Schriften die Subtraction gleich

gleich nach der Addition abgehandelt wird, und die sogenannte zweite Species ist; so finden wir uns, um keine Neuerung zu machen, nunmehr genöthiget, die Regeln der Subtraction zu erklären, wenn wir vorhero gezeigt haben, wie die Zahlen vermindert werden. Eine Zahl kann kleiner werden, wenn man entweder viele und verschiedene andere Zahlen von einer Art nach und nach von ihr wegnimmt, oder wenn man nur eine einige Zahl, so oft als möglich ist, von ihr abziehet: oder überhaupt, man kann eine Zahl vermindern, wann man eine andere von ihr hinwegnimmt, ohne darauf zu sehen, um wie vielmal sie kleiner worden seye, als sie vorherin war; ich sage um wie vielmal und nicht um wie viel. Man kann sie aber auch vermindern, wenn man sich bemühet, sie genau so vielmal kleiner zu machen, als man verlangt, z. E. zweymal, oder drey mal, oder sechsmal kleiner, als sie vorherin war. Jenes heißt subtrahiren, dieses dividiren. Wir reden aber bey diesen Vermehrungs- und Verminderungsarten von ganzen Zahlen: dann in gebrochenen Zahlen pflegt die Multiplication zu vermindern, und die Division zu vermehren, wie wir zu seiner Zeit erweisen werden.

tiplication, als der zweiten Art, die Zahlen zu vermehren, handle?

Wie die Zahlen kleiner oder vermindert werden?

M.

§. 28. Subtrahiren heißt also nichts Erklärungs anders, als eine gegebene Zahl um eine der Subtraction.

Warum der
Rest auch die
Differenz
oder der
Unterschied ge-
nannt

andere gleichfalls gegebene Zahl kleiner machen, oder von einer gegebenen Zahl eine andere hinweg nehmen, damit man wisse, was nach geschעהner Operation übrig bleibe. 3. E. ich solle von sechs abziehen viere, so bleiben zwey übrig. Herr v. Wolf erklärt deswegen die Subtraction durch die Erfindung einer Zahl, welche mit der abzuziehenden Zahl zusammen genommen der zu vermindern- den Zahl gleich ist. Dann wie $6 - 4 = 2$, so ist auch $2 + 4 = 6$. Und das ist die sogenannte Probe der Subtraction. Wir wollen aber unsere obige Erklärung be- behalten, und diß einige noch melden, daß die Zahl, von welcher eine andere ab- gezogen wird, die zu vermindern- de Zahl (numerus minuendus), diejenige, welche abgezogen wird, die abzuziehende Zahl (numerus subtrahendus), und die gefun- dene, welche nach geschעהner Operation übrig bleibt, der Rest oder die Diffe- renz, (Residuum vel differentia) genannt wird. Dieser letztere Name hat seinen guten Grund. Denn der Rest zeigt an, um wie viel die eine von den gegebenen Zahlen grösser oder kleiner sey als die andere; 3. E. $6 - 4 = 2$; also ist 6 um 2 grösser als 4, und 4 um 2 kleiner als 6; folglich 2 der Unterscheid oder die Diffe- renz zwischen 6 und 4. Man muß sich das Wort Differenz vorzüglich bekannt ma-

machen, weil es bey den arithmetischen Verhältnissen und Progressionen wiederum vorkommt, und zum Verstand derselben vieles be trägt.

§. 29. Nunmehr haben wir zu zeigen, wie die Regeln der Subtraction in ungenannten grössern Zahlen mit Vortheil angewandt werden können. Die Sache hat an sich selbst keine Schwierigkeiten. Dann weil eine jede Zahl aus Einheiten, Zehnern, Hundertern, Tausendern bestehet; so ist klar, daß man die Einheiten von Einheiten, Zehner von Zehnern, Hunderter von Hundertern u. s. w. nach und nach abziehen, folglich abermal, wie bey der Addition, von hinten anfangen, auch alle Verwirrung zu vermeiden, die gegebene Zahlen von der gesuchten Differenz durch einen Querstrich absondern müsse. Z. E. man solle von 2486 abziehen 1254.

so ist der Rest 1232

dann er enthält die Differenz aller Einheiten, Hunderter, Tausender u. s. w. 4 Einheiten von 6 Einheiten lassen übrig 2 Einheiten; 5 Zehner von 8 Zehnern lassen übrig 3 Zehner; 2 Hunderter von 4 Hundertern lassen übrig 2 Hunderter; 1 Tausender von 2 Tausendern läßt übrig 1 Tausender. Die gefundene Zahl ist also die Summe aller übriggebliebenen Ein-

Beweis der Subtraction.

Probe der
Subtraction;
und warum
auf diese
Probe mehr
als auf die
gewöhnliche
Probe der
Addition
gehalten
werde.

heiten, Zehner, Hunderter und Tausender; folglich die wahre Differenz zwischen den zwei gegebenen Zahlen. Und das ist der Beweis der Subtraction. Neben diesem Beweis hat man auch eine leichte Probe der Subtraction, die sich auf die Wolfische Erklärung und auf die Natur der ganzen Operation §. 28. gründet. Wenn man nemlich die gefundene Zahl zur gegebenen kleinern Zahl addirt; so muß die grössere wieder heraus kommen. Diese Probe ist natürlich und leichter als die Wiederholung der Operation selbst: weil das Addiren leichter ist als das Subtrahiren, und man, die Probe zu machen, nur zwei Kennen von Zahlen addiren darf. Diejenige Schwierigkeiten, die wir §. 24. berührt haben, fallen also hier gänzlich hinweg. In unserm vorgegebenen Exempel wird demnach die grössere Zahl wieder heraus kommen, wenn man die gefundene Differenz zu derjenigen Zahl, die man abgezogen hatte, addiret.

Minuendus 2486

Subtrahend. 1254

Different. 1232

Minuendus 2486

So oft nun dieses geschieht, so oft hat man ein sichres Kennzeichen, daß man recht gerechnet habe; wenn man anders in der Probe selbst nicht fehlet.

§. 30. Das gegebene Exempel ist von der leichtesten Art. Es sind aber noch ^{Zwei schwerere} zwei Gattungen der Subtraction übrig, ^{re} Gattungen welche etwas schwerer scheinen. Die ei- ^{der Subtrac-} ne ist, wenn man eine grössere Zahl von ^{tion werden} einer kleinern abziehen sollte; die andere, ^{angezeigt;} wenn in der zu vermindernenden Zahl Nullen vorkommen. In beeden Fällen muß man von den unmittelbar vorhergehenden Stellen etwas entlehnen, damit eine gegebene Zahl entweder von einer kleinern, oder von einer Stelle der Nullen wirklich abgezogen werden könne. Da nun in ^{wie man es} der unter uns üblichen Zahlenordnung ei- ^{machen müs-} ne jede Stelle zehenmal grösser oder klei- ^{se, wenn man} ner ist, als die unmittelbar daneben stehende; so wird eine jede für die unmittel- ^{in ungenann-} bar niedrigere Stelle entlehnte Einheit zeh- ^{ten Zahlen} nenmal so groß seyn, als die Einheit der ^{das grössere} ^{von dem klei-} ^{ern abzie-} ^{hen solle;} ^{und was das} ^{Entleihen} ^{seyt?} ^{zeich-}jenigen Stelle, in welche sie entlehnt wird. Folglich wenn ich aus der Zehner- ^{stelle eine Einheit für die eigentlich sogenann-} ^{te Einheiten entlehne, so werde ich} ^{zehn Einheiten bekommen; entlehne ich} ^{aus der Stelle der Hunderter eine Ein-} ^{heit, oder einen Hunderter, für die Stelle} ^{der Zehner, so bekomme ich zehn Zeh-} ^{ner u. s. w. Hieraus siehet man, daß,} ^{wenn man die Zahlzeichen, von welchen} ^{eine Einheit in ihrer Art, z. E. ein Zeh-} ^{ner, ein Hunderter, ein Tausender ent-} ^{lehnt worden ist, mit einem Punkt be-} ^{zeichnet}

16 Arithm. II. Cap. Von den

zeichnet, auch solche Exempel, wo man das Größere hie und da vom Kleinern abziehet, sich nach den allgemeinen Regeln der Subtraction behandeln lassen. 3. E.

Exempel und
Beweis vom
Entleihen.

$$\begin{array}{r} 3'42'5 \\ 918 \\ \hline 2507 \end{array}$$

Dann 8 Einheiten kann ich von fünf Einheiten nicht abziehen; folglich entlehne ich eine Einheit aus der Stelle der Zehner: eine Einheit aber aus der Stelle der Zehner ist ein Zehner, oder zehen Einheiten von der ersten Classe gleich; folglich habe ich zusammen fünfzehn Einheiten, von welchen ich acht wohl abziehen kann; ich schreibe also unter den Querstrich sieben, weil $15 - 8 = 7$. Hernach subtrahire ich einen Zehner von dem obigen Zehner, welcher wegen dem Punkt durch die geschehene Entlehnung um eins verringert, und da er vorhero ein zweifacher Zehner war, jezo nur noch ein einfacher ist. Der Rest davon ist also Null, welche ich in die Stelle der Zehner unter den Querstrich setze. Ferner sollte ich neun Hunderter von vier Hundertern subtrahiren: weil nun dieses nicht geschehen kann, so entlehnte ich aus der folgenden Stelle der Tausender eine Einheit, welche zehen Hundertern gleich ist; ich werde auf diese Weise

Weise vierzehn Hunderter bekommen, von welchen sich neun Hunderterfüglich abziehen lassen, indeme der Rest noch fünfse enthält. Weil ich endlich von den drey Tausendern eine Einheit entlehnt, so bleiben nur noch zween übrig, welche gleichfalls unter den Querstrich zur Differenz in die Stelle der Tausender gesetzt werden.

§. 31. Sollen aber in der zu vermin^{Was man zu} dernden Zahl Nullen vorkommen, so^{thun habe,} verfährt man abermal auf gleiche Weise, nur mit dem Unterschied, daß die Null^{wenn man} len, von welchen man ohnehin nichts ent^{wirkliche} leihen kann, nach geschעהer Entleh^{Größen von,} nung von dem nächsten Zahlzeichen, im^{Nullen abzie-} Sinne zu Neunern gemacht werden müs^{sen solle, oder} sen. Die Ursache davon ist leicht zu be^{wenn in der} greiffen. Denn wenn ich z. E. von 20^{zu vermin-} eins wegnehme, so bleibt 19; also wird^{dernden Zahl} weil ich nur eins wegnehme, die letzte Null^{Nullen vor-} le zum Neuner, und der zweyfache Zeh^{kommen.} ner, von dem ich einen entleihen mußte, zu einem einfachen Zehner. Wiederum, wann ich von 200 eins hinweg nehme, so bleibt 199; und die beede Nullen werden Neuner: nehme ich von 200 zwey hinweg, so bleibt 198; und die letzte Nulle, welche um einen Zehner vermehrt worden, folglich gleich ist + 10, wird achte übrig lassen, die nächste Nulle aber in einen Neuner verwandelt. : Wiederum, wenn ich

Warum die
Nullen nach
geschehener
Entlehnung
zu Neunern
werden.

Beweis und
Exempel da-
zu.

ich 2 von 2000 abziehe, so bleiben übrig 1998; hier werden abermal alle zwischen der letzten Null und dem nächsten Zahlzeichen stehende Nullen in Neuner verwandelt. Auf gleiche Weise läßt sich nun begreifen, daß auch in grossen Exempeln, die man nicht im Kopfe rechnen kann, diese Veränderung statt haben müsse. Der Beweis davon ist nicht schwer. Dann wie $10 = 9 + 1$, und $100 = 9 \text{ Zehnern} + 9 \text{ Einheiten} + 1$; so sind auch $1000 = 9 \text{ Hundertern} + 9 \text{ Zehnern} + 9 \text{ Einheiten} + 1$. Wenn demnach nur eine Einheit der letzten Classe subtrahirt werden solle; so ist die Differenz $= 9 \text{ Hundertern} + 9 \text{ Zehnern} + 9 \text{ Einheiten u. s. w.}$ Nun werden die Exempel von dieser Gattung leicht zu machen seyn. Man solle

$$\begin{array}{r} \text{von} \quad 48'0'0'0'0'28 \\ \text{subtrahiren} \quad 25030046 \\ \hline \text{so ist der Rest} \quad 22969982 \end{array}$$

Dann 6 von 8 läßt 2, 4 von 2 kann man nicht abziehen, folglich entlehnt man von dem nächsten Zahlzeichen, 8, welches schon in der Stelle der Millionen steht, eine Einheit der Millionen, wodurch ruckwärts alle dazwischen liggende Nullen in Neuner und der Zweyer in 2 + 10 oder in 12 verwandelt wird. Nun sage ich 4 von 12 läßt 8; ferner 0 von 9 läßt 9; 0 von 9 läßt 9, 3 von 9 läßt 6, 0 von 9 läßt 9, 5 von

5 von 7 läßt 2, und 2 von 4 läßt 2. Um mehrerer Gewisheit willen darf man nur die §. 29. vorgeschriebene Probe nachmachen.

§. 32. Wie man mit genannten Zahlen addirt, so kann man auch genannte Zahlen von einander subtrahiren. Z. E. man solle von 6 fl. 40 fr. subtrahiren 4 fl. 25 fr. so ist der Rest: 2 fl. 15 fr.

Von der Subtraction in genannten Zahlen.

Dieses Exempel ist klar und faßlich genug. Wenn man aber das kleinere vom größern subtrahiren solle, so scheint die Sache mehr Schwierigkeit zu haben. Allein man kann eine solche Aufgabe nach zwei Methoden auflösen. Dann entweder muß ich eben wissen, wie viel Kreuzer auf einen Gulden gehen, und wo es nöthig ist, für einen Gulden Kreuzer entlehnen u. s. w. oder ich darf nur, wenn ich das größere vom kleinern abziehen solle, die Operation umkehren, und das kleinere vom größern subtrahiren, den Rest aber hernach negativ oder mit dem Zeichen minus bemerken und setzen. Z. E. weil sechzig Kreuzer auf einen Gulden gehen, so werde ich durch Hülfe des Entlehnens, folgende Aufgabe leicht berechnen können. Man solle nemlich

Wie man die Sache angreiffen habe, wenn man in genannten Zahlen das Größere vom Kleinern abziehen solle?

Erste Methode.

60 Arithm. II. Cap. Von den

von	18 fl. 36 fr.
abziehen	12 fl. 40 fr.
	5 fl. 56 fr.

so hat man

Denn wenn ich zu 36 fr. noch für einen Gulden Kreuzer entlehne, so habe ich 60 + 36 fr. das ist 96 fr. von diesen lassen sich 40 fr. abziehen, und bleiben übrig 56 fr. die Gulden aber werden eben deswegen um einen vermindert: daher man hernach die 12 fl. nicht von 18 sondern nur von 17 fl. abziehen darf. Allein die andere Art, die ich sogleich anführen werde, ist kürzer und bequemer: denn wenn ich das obige Exempel noch einmal setze,

Zweyte und
leichtere
Methode.

Beweis und
Nutzen dieser
Methode.

18 fl.	36 fr.
12 fl.	40 fr.

so ist der Rest 6 fl. minus 4 fr.

denn ich darf nur 36 von 40 subtrahiren, und sagen, der Rest 4 ist negativ: dann 6 fl. weniger 4 fr. ist eben so viel als 5 fl. + 56 fr. Diese Art zu subtrahiren hat nicht nur in verschiedenen weitläufigen Exempeln, wie ich bey der Berechnung des julianischen Periodus in meinem Examine temporum gezeigt habe, ihre grosse Vorthelle, sondern sie bahnet uns auch den Weg zur Subtraction in der Buchstabenrechnung; welche wir jezo vollends erklären wollen.

§. 33. Man giebt in der Buchstabenrechnung verschiedene Regeln vom Subtrahiren, deren aber diejenigen leicht entübriget seyn können, welche den Grund davon einsehen und verstehen. Man kann plus von plus, minus von minus, plus von minus, minus von plus, grössers von kleinern, und kleineres von grössern subtrahiren. Alle diese Fälle kommen hier vor; sie sind aber gar nicht schwer, wenn man nur in dem Nachdenken sich ein wenig üben mag. Es ist natürlich, daß, wenn ich

$$\begin{array}{r} \text{von} \quad 4a + 3b + c \\ \text{subtrahire} \quad 3a + b + c \\ \hline \text{der Rest} \quad a + 2b \text{ heisset;} \end{array}$$

Erster Fall, wenn man plus von plus, und zwar das Kleinere vom Grössern subtrahirt.

das ist der erste und leichteste Fall: dann c von c geht auf, ein b von $3b$ läßt $2b$, und $3a$ von $4a$ läßt ein a . Wenn man ferner bey einerley Zeichen das grössere vom kleinern abziehet; so kehrt man, wie ich §. 34. gezeigt habe, die Operation um, und zieht das kleinere vom grössern ab, setzt aber dem Rest das entgegen stehende Zeichen vor. Z. E.

Zweyter Fall, wenn man plus von plus, aber zugleich das Grössere von dem Kleinern subtrahirt.

$$\begin{array}{r} 5a + 2b + 3c \\ 2a + 6b + 4c \\ \hline \text{läßt übrig} \quad 3a - 4b - c \end{array}$$

dann $2a$ von $5a$ lassen $3a$; $6b$ von $2b$ kann

Kann ich nicht abziehen; ich kehre es aber um, und ziehe $2b$ von $6b$ ab, und bemerke den Rest $4b$ mit dem Zeichen — oder minus. Denn wenn z. E. der Buchstabe b Kreuzer, und der Buchstabe a Gulden bedeuten sollte; so wird ja ($5 \text{ fl.} + 2 \text{ fr.}$) — ($2 \text{ fl.} + 6 \text{ fr.}$) = $3 \text{ fl.} - 4 \text{ fr.}$ oder 3 fl. weniger 4 fr. . Oder überhaupt, wenn einer zweien Kreuzer hat, und solle sechs davon bezahlen, so werden ihm nothwendiger Weise noch vier dazu fehlen; und das zeigt man im Rest an, wie viel ihm zu Bezahlung dieser Schuld noch fehle. Eben so macht mans, wenn man von $3c$ subtrahiren solle $4c$; da dann ein c noch fehlet. Das wird unten im Rest angezeigt. Vielleicht drückt man sich auf diese Weise faßlicher aus, als wenn man sagt, minus $4b$ bleiben übrig. Dann die Redensart übrig bleiben, oder das lateinische Residuum zeigt etwas positives an. Und das ist eben die Ursache, warum sich so manche darüber aufhalten, wenn sie hören, daß sich die Mathematik mit weniger als nichts beschäftigt. Allein der Scheinwiderspruch hängt bloß von dem Schall und Klange eines Wortes oder einer Redensart ab, die man nicht hinlänglich versteht. In der höhern Geometrie sind viele negative Größen wirkliche Größen, und sie heißen negativ, weil sie der positiven Größe in einer

Beispiel und
Beweis das
von.

Woher es
komme, daß
manchen das
mathematis-
che weniger
als nichts
so fremde und
angereimt
scheine?

Vorläufige
und kurze
Erläuterung
dieses Aus-
drucks.

ner

ner entgegen gesetzten Richtung liegen. Eben so muß man auch die negative Zahlen in der Arithmetik aus dem rechten Gesichtspunkt beurtheilen, wenn man davon vernünftig urtheilen will; wie wir an seinem Ort, so oft es Gelegenheit giebt, zeigen werden. Uebrigens kann man sich von dem Weniger als nichts, einigermaßen einen Begriff durch die Vorstellung eines Menschen machen, der mehr Schulden hat, als er zu bezahlen im Stande ist. Wiewohl es wenige Fälle giebt, in welchen dieses Gleichniß die verneinende Größen in der Mathematik hinlänglich erläutern könnte. Anfänger aber können sich damit eine Zeitlang helfen, und alle schwerscheinende Exempel dadurch erklären.

§. 34. In der Buchstabenrechnung giebt es bey dem Subtrahiren noch mehr Fälle, ausser den beeden, die wir angeführt haben. Sie kommen aber nicht so oft und häufig vor. Wer sich die beede §. 33. erklärte Exempel recht bekannt macht, der wird in manchen Rechnungen fortkommen können, wenn er auch die übrige Fälle nicht wissen sollte: doch wollen wir sie auch noch erklären. Man kann minus von minus, plus von minus, und minus von plus subtrahiren. Wir handeln zuerst vom letzten Falle. Wenn ich von 3 fl. subtrahire

Anderer aber nicht so oft vorkommende Fälle der Subtraction.

1 fl.

64 Arithm. II. Cap. Von den

Dritter Fall,
wenn minus
von plus sub-
trahirt wird.

1 fl. weniger 6 fr. so bleibt nothwendiger
Weise 2 fl. + 6 fr. übrig: dann indem ich
den ganzen Gulden abgezogen, so habe
ich zugleich 6 fr. zu viel abgezogen, folge-
lich muß ich sie im Rest wieder addiren.
Demnach giebt minus von plus im Rest
plus. Wenn ich also von $3a$ subtrahire
 $a - 6b$ so bleiben übrig $2a + 6b$;
oder in förmlichen Exempeln:

$$\begin{array}{r} 4a + 3b \\ 2a - 5b \\ \hline 2a + 8b \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \text{ fl.} + 3 \text{ fr.} \\ 2 \text{ fl.} - 5 \text{ fr.} \\ \hline 2 \text{ fl.} + 8 \text{ fr.} \end{array}$$

Vierter Fall,
wenn plus
von minus
subtrahirt
wird.

Wenn ich also minus von plus abziehe,
so darf ich nur die Zahlen addiren, und
die Summe im Rest mit dem Zeichen
plus bemerken. Der zweite Fall ist,
wenn man plus von minus subtrahiren
muß. Ich habe 3 fl. weniger 6 fr. da-
von sollen subtrahirt werden 2 fl. plus 3 fr.
so werden mir im Rest bleiben 1 fl. we-
niger 9 fr. In diesem Fall darf ich also
nur wiederum die Zahlen addiren, ihre
Summe aber mit dem Zeichen minus
bemerken. Z. E.

$$\begin{array}{r} 3a - 6b \\ 2a + 3b \\ \hline a - 9b \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \text{ fl.} - 6 \text{ fr.} \\ 2 \text{ fl.} + 3 \text{ fr.} \\ \hline 1 \text{ fl.} - 9 \text{ fr.} \end{array}$$

Es ist noch ein Fall übrig, da man mi-
nus von minus subtrahiret. Diß ge-
schie-

schlehet auf eine doppelte Weise: ich sol⁵ Fünfter Fall,
 Ich von 2 fl. weniger 10 fr. subtrahiren 1 fl. wenn minus
 weniger 4 fr. so werde ich im Rest haben von minus
 1 fl. weniger 6 fr. dann weil ich die 4 fr. subtrahirt
 nicht subtrahiren darf, so wird der obige wird, es mag
 Mangel von 10 fr. um 4 geringer, folge
 lich nur noch 6 fr. seyn. Sinegen wenn hernach das
 ich von 2 fl. weniger 10 fr. subtrahire 1 fl. kleinere vom
 weniger 12 fr. so habe ich im Rest 1 fl. plus grössern oder
 2 fr. Die Ursache ist leicht zu begreifen: das grössere
 der obige Mangel von 10 fr. wird nicht vom kleinern
 nur aufgehoben, sondern in eine positive subtrahirt
 Grösse verwandelt, welche dem Ueber-
 schuß der untern Zahl gleich ist. Folge werden.
 lich geht es hier wie bey der ersten Ope-
 ration, wenn man plus von plus subtra-
 hiret; §. 33. die abzuziehende Zahl mag
 hernach grösser oder kleiner seyn. Z. E.

$$\begin{array}{r} 2a - 10b \\ a - 4b \\ \hline a - 6b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2a - 10b \\ a - 12b \\ \hline a + 2b \end{array}$$

Denn wenn ich neben dem abgezogenen
 a die 4 b im ersten, oder die 12 b im an-
 dern Fall auch noch abzüge; so würde ich
 wirklich zu viel abziehen, weil ich nicht
 das ganze a, sondern das um 4 oder 12 b
 verminderte a abziehen darf. Demnach
 muß ich diese 4 oder 12 b wieder addiren:
 dann gerade um so viel b würde ich son-
 sten zu viel subtrahiren. Das sind nun

Exempel,
worinnen
alle Fälle
vorkommen.

alle Fälle, die bey dem Subtrahiren vorkommen, und in folgendem Exempel enthalten sind:

$$\begin{array}{r} 4a + 3b - 5c + 8d - 7e - 2f \\ 3a + 8b + 4c - 8d - 3e - 6f + g - 2h \\ \hline a - 5b - 9c + 16d - 4e + 4f - g + 2h \end{array}$$

Erläuterung
des gegebenen
Exempels.

Ein einiger Fall scheint übrig zu seyn; der sich aber von selbst verstehen läßt. Ich habe in dem zu subtrahirenden Rechen die Buchstaben $+ g - 2h$ gesetzt, welche sich in dem zu vermindernenden Rechen auf keine ähnliche Buchstaben beziehen, und dennoch subtrahirt worden sind. Allein wenn ich von 3 fl. subtrahire 1 fl. + 3 fr. so habe ich auch in der zu vermindernenden Zahl keine Kreuzer, und doch sage ich: es bleiben mir im Rest 2 fl. weniger 3 fr. Eben so bleiben mir 2 fl. + 3 fr. übrig, wenn ich von 3 fl. subtrahire 1 fl. weniger 3 fr. Das Exempel ist so deutlich, daß ich nicht nöthig habe, zur Erläuterung noch etwas hinzu zu setzen. Eines aber muß ich zum Beschluß vornehmlich anmerken, und meine Leser bitten, sich dasselbige bekannt zu machen. Wer das obige Exempel nur oberhin ansiehet, wird finden, daß der Rest eben so ausfallen würde, wie er ausgefallen ist, wenn man die Zeichen der zu subtrahirenden Zahl verändert, das ist, allemal aus plus minus

Eine allgemeine, kurze und höchst nützliche Regel für alle Fälle der

mus und aus minus plus gemacht, und Subtraction hernach beede Reihen addirt hätte. Aus in der Buch-
dieser Anmerkung läßt sich eine einige all-
gemeine kurze und faßliche Regel für alle ^{stabenrech-}
nur mögliche Fälle der Subtraction in ^{nung.}
Buchstaben, abstrahiren, welche folgen-
der massen ausgedrückt wird: verändere
alle Zeichen der abzuziehenden Zahl,
und addire nach geschehener Veräns-
derung. Oder verwandle bey der ab-
zuziehenden Zahl die Zeichen plus in
minus und minus in plus, hernach
addire beede Zahlen. Diese Regel ist ^{Große Vor-}
ungleich besser, als diejenigen, welche für ^{theile dieser}
alle einzelne Fälle besonders eingerichtet ^{Regel.}
sind; und weil sie schwer zu lernen sind,
auch nicht gleich oft vorkommen, das
Gedächtnis nicht nur beschweren, sondern
auch bald wieder vergessen werden.

§. 35. Multipliciren heißt eine Zahl ^{Was Multi-}
etlichmal zu sich selbst addiren; die Multi- ^{pliciren seye.}
plication in ganzen Zahlen ist also wirk-
lich eine Art die Zahlen zu vermehren.
Diejenige Zahl, welche etlichmal zu sich ^{Namen, die}
selbst addirt wird, heißt die zu multiplici- ^{bey der Multi-}
rende Zahl; die andere Zahl, welche an- ^{plication}
zeigt, wie oft die erste zu sich selbst addirt ^{vorkommen.}
worden, ist der Multiplicator; beede zu- ^{Nemlich Pro-}
sammen heißen die Factores oder die ^{duct, oder}
Efficientes. Die nach geschehener Operation ^{factum, fac-}
erfundene oder herauskommende Zahl nent- ^{tores oder}
et man das Factum oder das Product. ^{efficientes,}
^{multiplica-}
^{tor u. s. w.}

3. E. ich solle sechs mit drey multipliciren , so sind 6 und 3 die Factores ; 3 mal 6 oder 18 aber ist das Product oder Factum. Die Multiplication selbst geschiehet wirklich durch eine schnelle Addition ; und zwar im vorgeschriebenen Fall , durch eine dreymalige Addition des Sechfers zu sich selbst : denn wenn ich 6 dreymal zu sich selbst addire , wie im benzesetzten Exempel ,

6

6

6

so ist die Summe : 18

Diese Summe heisset nun in der Multiplication ein Product. Weil aber eine solche Operation zu weitläufftig würde , wenn ich grosse Zahlen z. E. 324 mit 256 multipliciren oder zweyhundert und sechs und fünfzig mal zu sich selbst addiren sollte ; so hat man auf Mittel gedacht , die gewöhnliche aber dabey langsame Addition in eine schnellere , kürzere und weniger Platz einnehmende Addition zu verwandeln. Und das geschiehet durch Hülfe des Einmal eins oder der pythagorischen Rechentafel , welche man auswendig lernen , oder , so oft man multiplicirt , beständig vor Augen haben muß. Diese Rechentafel ist nichts anders als eine wirkliche Addition aller möglichen einfachen Zahlen , so oft sie sich nach ihren Ein-

heiß

Wie und warum man in der Multiplication die gewöhnliche Addition bloß in eine schnellere Addition verwandelt.

heiten zu sich selbst addiren lassen. **B. E.** Warum das was ist die Summe, wann 9 zu sich selbst Einmal eine 9 mal, oder 8 mal, oder 7 mal, oder 6 ^{nur bis an} mal u. s. w. addirt wird. Ueber die Zehner, ^{10 oder 9 ge} Hunderter, Tausender u. s. w. darf die ^{lernet wer} Rechentafel nicht hinausgehen. Dann ^{den dürfe.} von zehen bis hundert kommen alle einfache Zahlen wieder vor; so auch von hundert bis tausend u. s. w. Man hat also genug, wenn man diese schnelle Addition von 1 bis 9 auswendig kann: weil die weitere Stellen durch die Decimalprogression von selbst nach dem ersten Capitel bestimmt werden. Nur muß man Achtung geben, ob man mit eigentlichen Einheiten, oder mit Zehnern, oder mit Hundertern u. s. w. multiplicire; in welchem Fall die Zahlzeichen so viel Nullen hinter sich bekommen, um so viel Stellen sie ihrem Werth und Rang nach vorgerückt werden. Doch darf man die Nullen nicht ausdrucken, wenn man nur die Stelle oder den Rang im Anfang gleich genau beobachtet. Endlich siehet man leicht, ^{Worauf sich} daß die Erfindung dieser schnellen Addition ^{die Erfindung des} sich auf die gewöhnliche und bey uns ^{Einmaleins} eingeführte arabische Zahlzeichen gründe, ^{gründe;} folglich bey andern Zeichen nicht statt habe, wenigstens wenn sie statt finden sollte, vorher nach der Menge der Zeichen verändert werden müßte. ^{warum es} So darf man ^{3. bey der leibnizianischen} **E.** bey der leibnizianischen Dyadik das

Obadil und
bey der bloß-
sen Buchsta-
benrechnung
nicht statt
finde?

Ob man des-
sen zu lieb,
die das Ein-
mal eins
nicht lernen
mögen, leicht-
tere Hülf-
mittel zu
multipliciren
erfinden solle
und könne?

Einmal eins nicht wissen, und kann doch
alles multipliciren, wenn man nur dupli-
ren kann. Auf gleiche Weise braucht
man zur Multiplication der Buchstaben
als Buchstaben gar kein Einmal eins,
wie wir an seinem Ort zeigen werden.
Singegen zur gewöhnlichen Multiplica-
tion unserer eingeführten Zahlzeichen muß
man das Einmal eins wissen. Und es ist
eine bloße Trägheit, wenn man es nicht
lernen mag. Ich kann daher die allzu-
grosse Herablassung dererjenigen nicht bil-
ligen, welche den Arithmetischen Müßig-
gängern zu gefallen allerhand Methoden
erfunden haben, deren sie sich bedienen
könnten, wenn sie zu träge sind, das Ein-
mal eins zu lernen. Alle diese Manieren
aber sind ungleich weitläuftiger, als die
gewöhnliche, welche durch Hülfe des py-
thagorischen Rechentäfeleins sich ausrech-
nen läßt. Man wird daher um so we-
niger von mir fordern, daß ich eine da-
von namhaft machen solle, weil derjenis-
ge, der das leichte und kurze Einmal eins
gelernt hat, drey Exempel gerechnet ha-
ben wird, ehe der andere, der die Regel
der Säulen vorziehet, nur die Zurüstung
zur Berechnung eines einigen Exempels
gemacht hat.

S. 36. Ich habe die pythagorische Re-
chentafel oder das Einmal eins öfters
schon genennet, auch gezeigt, worinnen
die

die Vortheile desselben bestehen : doch wird die Sache deutlicher werden , wenn ich die Tafel , oder vielmehr das Täfelein selbst hersehe. Man macht ein Quadrat , und theilet es nach der Breite und Länge in gleichviel kleinere Quadrätlein , nemlich auf jeder Seite in neun Quadrätlein , ein ; schreibet sodann die einfache Zahlen von 1 bis 9 nach der Quer und Länge in die erstere Quadrätlein ; hernach addirt man eine jede einfache Zahl nach der Ordnung 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9mal zu sich selbst , und schreibt die Aggregata in die folgende Quadrätlein. Z. E.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

In diesem Täfelein werden alle einfache Zahlen nach der Ordnung neunmal zu sich selbst addirt. Z. E. wenn ich 6 nach der Quere oder Länge suche , so finde ich

in den folgenden Quadrätlein die Summe von 6, zweymal, oder 3 mal, oder 4 mal, oder 5 mal u. s. w. zu sich selbst addirt. Will ich nun die Producte wissen, so darf ich nur die eine Zahl nach dem ersten Querstrich, oder nach der Breite, und die andere nach der Länge, aber im ersten Reihender Quadrätlein, auffuchen, und die auf beede Zahlzeichen in geraden Linien sich beziehende Zahl suchen, welche das Product seyn wird. Z. E. wie viel ist 7 mal 4? Sieben suche ich nach der Länge, 4 nach der Breite; Alsdann schaue ich von 4 in die gerade Linie herunter, bis die Querlinie von 7 die obige Verticallinien durchschneidet. Das daselbst befindliche Quadrätlein enthält das Product 28, oder das Aggregat von 7 viermal zu sich selbst addirt. Eben so würde ich dieses Product finden, wenn ich 7 nach der Breite und 4 nach der Länge suchen wollte. Diese Rechentafel hat vor dem sonst gewöhnlicher massen vorgeschriebenen Einmal eins den Vorzug, daß man sogleich hinter sich und für sich, wie man sagt, multipliciren oder z. E. wissen kann, wie viel nicht nur 7 mal 9, sondern auch 9 mal 7 seye. Doch wollen wir jezo das gewöhnliche Einmal Eins zum lernen auch noch hersehen:

Wie man das
Einmal eins
ausprechen
und lernen
solle?

1	mal	1	ist	1
2	mal	2	ist	4
3	mal	3	ist	6
2	mal	4	ist	8
2	mal	5	ist	10
2	mal	6	ist	12
2	mal	7	ist	14
2	mal	8	ist	16
2	mal	9	ist	18
2	mal	10	ist	20.

5	mal	5	ist	25
5	mal	6	ist	30
5	mal	7	ist	35
5	mal	8	ist	40
5	mal	9	ist	45
5	mal	10	ist	50.
6	mal	6	ist	36
6	mal	7	ist	42
6	mal	8	ist	48
6	mal	9	ist	54
6	mal	10	ist	60.

3	mal	3	ist	9
3	mal	4	ist	12
3	mal	5	ist	15
3	mal	6	ist	18
3	mal	7	ist	21
3	mal	8	ist	24
3	mal	9	ist	27
3	mal	10	ist	30.

7	mal	7	ist	49
7	mal	8	ist	56
7	mal	9	ist	63
7	mal	10	ist	70.
8	mal	8	ist	64
8	mal	9	ist	72
8	mal	10	ist	80.

9	mal	9	ist	81
9	mal	10	ist	90.

4	mal	4	ist	16
4	mal	5	ist	20
4	mal	6	ist	24
4	mal	7	ist	28
4	mal	8	ist	32
4	mal	9	ist	36
4	mal	10	ist	40.

10	mal	10	ist	100
10	mal	100	ist	1000
10	mal	1000	ist	10000
10	mal	10000	ist	100000
10	mal	100000	ist	1000000
oder Million.				

Wie man
durch Hülfe
des Einmal
eins wirklich
multiplicire?

§. 37. Nun wird es gar keine sonderliche Kunst seyn, alle nur mögliche auch noch so grosse Zahlen zu multipliciren. Z. E. ich solle 3648 mit 436 multipliciren, das ist 6 mal, hernach 30 mal, und endlich noch 400 mal zu sich selbst addiren: folglich setze ich den Multiplicator unter die zu multiplicirende Zahl, so, daß die Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner und so weiter zu stehen kommen; hernach mache ich einen Strich, und multiplicire nach dem Einmal eins zuerst alles mit den Einheiten, ferner mit den Zehnern, endlich mit den Hundertern, und addire zuletzt die gefundene einzelne Producte zusammen.

$$\begin{array}{r}
 3648 \\
 436 \\
 \hline
 21888 \\
 10944 \\
 14592 \\
 \hline
 1590528
 \end{array}$$

Dann ich sage 6 mal 8 ist 48; setze also 8 Einheiten und behalte die 4 Zehner für die folgende Stelle; ferner 6 mal 4 ist 24, und 4 Zehner, die ich behalten, dazu, geben 28, das sind 8 Zehner die ich setze, und 2 Hunderter die ich für die folgende Stelle der Hunderter aufhebe; weiters 6 mal 6 ist 36 und die 2 übrig behaltene Hun-

Hunderter dazu , machen 38 u. s. w. Wenn ich alles mit den Einheiten durchmultiplicirt habe , so multiplicire ich auch mit den Zehnern , und sage : 3 mal 8 oder 30 mal 8 , denn es sind , wie ihre Stelle ausweist , 3 Zehner , geben 24 Zehner , oder 240 Einheiten ; folglich muß ich entweder unter den ersten achter in die Stellen der Einheiten eine Null setzen , oder darf ich dieselbe auch ganz leer lassen , wenn ich nur den vierer unter die folgende Classe setze , weil er Zehner anzeigt , folglich unmöglich unter die Einheiten gesetzt werden kann. Aus gleichem Grunde muß ich , wenn ich mit Hundertern multiplicire , das erste gefundene Zahlzeichen unter die Stelle der Hunderter setzen u. s. w. Daß endlich die partial Producte hernach besonders addirt werden müssen , ist vorhin klar : dann ich verlange nicht blos die verschiedene partial Producte , sondern dasjenige Product zu wissen , das allen zusammen genommen gleich ist. Da ich nun durch diese Rechnung die Summe der Producte aller Einheiten , aller Zehner , aller Hunderter u. s. w. in die zu multiplicirende Zahl bekomme ; so siehet man leicht , daß nach der vorgeschriebenen Methode alle mögliche Zahlen multiplicirt werden können. Und das ist der Beweis von der Multiplication.

Warum man, wenn mit mehreren Zahlen multiplicirt wird, das eine partial Product als lemal um eine Stelle vor sich rücken muß.

Warum die partial Producte besonders wieder addirt werden?

Beweis von der Multiplication in ungenannten Zahlen.

Wie man die
Nullen in
der Multipli-
cation be-
handle;

§. 38. Bey der Multiplication kom-
men keine besondere Fälle wegen den Null-
len vor. Dann wie die Nullen, als
welche blos die Plätze ausfüllen, und den
Rang der Zahlzeichen bestimmen helfen,
in der Addition nichts vermehren, so ver-
mehren sie auch nichts in der Multiplika-
tion: man sagt daher ganz recht, Null
mal Nullen ist Nullen, zweymal Null-
len ist Nullen u. s. w. Weil sie aber
nichts desto weniger den Rang der Zahl-
zeichen wirklich nach der Decimalprogres-
sion vergrößern, so darf man sie auch
hier nicht gänzlich aus der Acht lassen.
Wann ich z. E. 423. mit 100 multi-
plicire, so setze ich:

$$\begin{array}{r} 423 \\ 100 \\ \hline 000 \\ 000 \\ 423 \\ \hline 42300 \end{array}$$

Erster Fall, und sage, weil keine Zahlzeichen in der
wenn am En- Stelle der Einheiten sich befinden, Null-
de einige le mal 3 ist Nullen, 0 mal 2 ist 0, 0 mal
Nullen ange- 4 ist 0; ferner, weil keine Zahlzeichen in
hängt sind; der Stelle der Zehner stehen, abermal
sie mögen Nullen mal 3 ist Nullen, 0 mal 2 ist 0, 0
hernach dem mal 4 ist 0; fange aber unter der Stelle
der Zehner an §. 37. Endlich weil ein
Hunderter da ist, so fange ich zuletzt in der
Stelle der Hunderter zu schreiben an, und
sage

sage 1 mal 3 ist 3, 1 mal 2 ist 2, 1 mal Multiplikator
4 ist 4; die partial Producte addire ich zu- oder der zu
sammen, und bekomme die Zahl 42300. multiplicir
Aus diesem Exempel ist klar, daß man einer renden Zahl
Zahl, die mit 10, 100, 1000. u. s. w. mul- angehängt
tiplicirt wird, nur so viel Nullen anhän- seyn.
gen darf, als der Multiplikator Nullen
enthält. Wenn ich also 34 mit 1000
multiplicire, so ist das Product 34000.
Sollte ich aber 34 mit 2000 multipliciren,
so multiplicire ich nur mit 2 und hänge
dem Product die 3 Nullen noch an, z. E.
8000 ist das Product von 4. 2000.
Eben so geht es wenn ich 2000 mit 34
multiplicire; indeme ich abermal nur den
Zweyer mit 34 multipliciren und hernach
dem Product die 3 Nullen anhängen darf.
Sollten aber mitten in der Zahl Nullen Zweyter Fall,
seyn, so verfare ich nach der allgemeinen wenn in der
Regel; oder wenn die Nullen im Multi- Mitte Null
plicator stehen, so rücke ich nur das erste len stehen;
Zahlzeichen nach der Null um zwei Stel- und zwar erst
len u. s. w. zumal fort: z. E.

$$\begin{array}{r}
 3004 \\
 23 \\
 \hline
 9012 \\
 6008 \\
 \hline
 69092
 \end{array}$$

3 mal 4 ist 12, das sind 2 Einheiten und
ein Zehner für die folgende Stelle; fer-
ner 3 mal 0 ist 0, und ein Zehner von
dem

lich in der zu
multiplicirens
den Zahl.

ferner in dem
Multiplicator,
oder wenn der
Multiplicator
zwischen den
ersten und letzten
Zahlzeichen
Nullen hat.

dem vorhergehenden Product, giebt 1 in die Stelle der Zehner; weiters 3 mal 0 ist 0, welche ich in die Stelle der Hunderter setze u. s. w. Stehen aber die Nullen im Multiplicator, so rücke ich das Product um 2, 3, oder mehr Stellen, je nachdem es viel oder wenig Nullen sind, zumal fort. Z. E.

$$\begin{array}{r}
 34086 \\
 2006 \\
 \hline
 204516 \\
 68172 \\
 \hline
 68376516
 \end{array}$$

Dann 6 mal 6 ist 36, das ist, 6 Einheiten und 3 Zehner für die folgende Stelle; 6 mal 8 ist 48 und 3 Zehner, die übrig behalten sind, dazu, geben 51, das ist, ein Zehner und 5 Hunderter; den Zehner setze ich und die 5 Hunderter kommen in die folgende Stelle; 6 mal 0 ist 0, und 5 Hunderter dazu, geben 5 Hunderter, die in die Stelle der Hunderter kommen u. s. w. Hernach sollte ich mit Zehnern alles durchmultipliciren: weil aber der Multiplicator in der Stelle der Zehner eine Nulle hat, so rücke ich in die Stelle der Hunderter mein nächstes Zahlzeichen fort; weil aber der Multiplicator auch in dieser Stelle eine Nulle hat, so wird das nächste Zahlzeichen in die Stelle der Tausender geschrieben: dann ich multiplicire hernach mit 2 Tausendern; und sage 2 mal 6 sind

Beweis und
Probe von
den bey den
Nullen gege-

6 sind 12 Tausender; folglich muß der ^{benen} ~~Re-~~
Zwener in die Stelle der Tausender zu ^{gela-}
stehen kommen. Sollte einer die Sache
noch nicht begreifen, so darf er nur nach
der allgemeinen Regel multipliciren; in
welchem Fall er leicht finden wird, daß
er sich ohne Noth doppelte und dreifache
Mühe mache, wenn er die gegebene Re-
gel nicht befolget. Z. E.

$$\begin{array}{r}
 34086 \\
 2006 \\
 \hline
 204516 \\
 000000 \\
 000000 \\
 68172 \\
 \hline
 68376516
 \end{array}$$

Hier kommt das obige Product wieder
heraus; und der Unterschied bestehet nur
darinnen, daß sich der Rechner unnöthig
ge Mühe mit den Nullen machen, und bey
dem zweiten und dritten Partialproduct
sagen mußte: 0 mal 6 ist 0, 0 mal 8 ist 0,
0 mal 0 ist 0, 0 mal 4 ist 0, u. s. w.

S. 39. Aus dem bisherigen erhellet, Einige allges
daß man mit Nullen und mit eins multi- ^{meine} ~~Säße~~
pliciren könne. Was aber mit Nullen werden aus
multiplicirt wird, das wird zu Nullen. ^{den} ~~bisheris~~
Viermal Nullen ist Nullen, und viermal ^{gen} ~~gefols~~
Nichts ist Nichts, heißt also gleich viel. ^{gert.}
Soleicht diese Anmerkung ist, so nöthig
will es seyn, daß man sie mit Fleiß be-
hal-

Eine wirkliche
Größe durch
Nullen mul-
tiplicirt wird
Nulle.

Nutzen dies-
es Satzes.

Eine wirkli-
che Größe
durch Eins
multiplicirt,
wird nicht
vermehrt
noch vermin-
dert; oder
Einmal Eins
ist Eins:

Nutzen dies-
es Satzes;

Wie und
warum die
gemeinste
Wahrheiten
die frucht-
barsten seyen;
und warum
man die Klei-

halte, und wisse, daß eine wirkliche Grö-
ße mit Nichts oder mit Nullen multipli-
cirt zu Nichts werde. In der Differen-
tialrechnung werde ich den Nutzen davon
zeigen, und beweisen, was für wichtige
Fehler durch Beobachtung dieser Kleinig-
keiten vermieden werden können. Alle
Welt weiß es, daß einer, wenn er vier-
mal nichts hat, so viel habe, als wenn
er einmal nichts oder überhaupt nichts
habe. Und doch ist dieser so gemeine
und bekannte Satz eben so wichtig, als
fruchtbar der folgende Grundsatz ist: daß
einmal Eins Eins seye; oder daß eine Zahl,
durch eins multiplicirt, weder vermehrt
noch vermindert werde, sondern sich selbst
vollkommen gleich bleibe. Z. E. einmal
sechs ist gleich sechsen; oder $1 \cdot 6 = 6$. und $1 \cdot 3 = 3$. u. s. w. Den Nutzen von diesem
so gemeinen und jedermann verständlichen
Satz wollen wir gleich im nächsten Ca-
pitel bey den Verhältnissen und Brüchen
zeigen; indeme sich die meiste Demon-
strationen der daselbst vorzutragenden
fruchtbaren Lehre von den Verhältnissen
blos darauf gründen, und dadurch faß-
lich gemacht werden können. Man sie-
het hieraus, daß die gemeinste Wahrhei-
ten die fruchtbarsten seyen, und daß man
ja nichts als eine Kleinigkeit ansehen oder
verachten solle, man habe dann zuvor be-
wiesen, daß es eine wirkliche Kleinigkeit
seye,

seye, und weder im gemeinen Leben noch in dem Reich der Wissenschaften irgend eine nützliche Folge haben könne. nigleiten
nicht verach-
ten solle?

§. 40. Wenn wir die Art zu multipliciren noch einmal betrachten, so finden wir, daß das Product die eine von den gegebenen Zahlen so oft in sich enthalte, als die andere von den gegebenen Zahlen Einheiten in sich begreift. In kleinen Exempeln erhellet dieses ganz deutlich. Dann wenn ich 3 mit 2 multiplicire, so kommt 6 heraus. Dieses Product 6 enthält den einen Factor 3 so oft, als der andere Factor 2 eins in sich begreift: dann 3 ist in 6 zweymal, und eines ist in 2 auch zweymal. enthalten. Wenn wir also

Worinnen
die Probe
der Multi-
plication be-
stehe;

schon dividiren könnten, so dürften wir nur das Product mit einem von den gegebenen Factoren dividiren; so würde der Quotient der andere Factor seyn, wofür wir in der Rechnung nicht gefehlt hätten: und das wäre die Probe der Multiplication. Weil wir aber die Regeln der Division noch nicht vorgetragen haben, so müssen wir diese Probe noch so lange aufschieben, bis wir deutlich wissen, was dividiren seye. Inzwischen hat

und warum
man sie noch
nicht vortra-
gen könne?

Hr. Baron von Wolf die obige Eigenschaft des Products in Rücksicht auf seine Factores zur Definition der Multiplication gemacht. Da aber die Nominal- definitionen willkührlich sind, weil eine je-

Auf was man
bey der will-

führlichen
logischen Er-
klärung in
einem Vor-
trag haupt-
sächlich zu se-
hen habe.

de Eigenschaft, die der Sache allein zu-
kommt, für eine Erklärung derselben an-
gesehen werden kann, auch ein jedes Ding
verschiedene Eigenschaften von solcher
Gattung haben kann; so darf man alle-
mal diejenige wählen, die einem zu sei-
nem Zweck am dienlichsten, für die Leser
und Zuhörer aber am faßlichsten und so
beschaffen zu seyn scheint, daß alles übrige,
was von der Sache gesagt werden
solle, auf eine ungezwungene und leichte
Art daraus hergeleitet werden kann.

Von der
Multiplicati-
on in ge-
nannten
Zahlen.

§. 41. Die Multiplication kann auch,
wie die Addition und Subtraction, in ge-
nannten Zahlen geschehen. Weil sich
aber Gulden mit Kreuzern, u. s. w. wenn
man die Gulden nicht vorher zu Kreuzern
gemacht hat, nicht wohl multipliciren lassen;
so siehet man schon, daß man in diesem Fall
alles unter einerley Benennung bringen
müsse. Wiewohlen wir an seinem Ort,
besonders in der Geometrie, zeigen wer-
den, daß man dieser Reduction durch ei-
nige andere Vortheile könne überhoben
werden, und z. E. 3 Schuhe 4 Zoll mit
5 Schuhen 6 Zoll multipliciren dürfe, oh-
ne daß man nöthig hätte, die Schuhe in
Zolle zu verwandeln. Dergleichen Re-
geln der Fertigkeit werden wir nur bey
solchen Fällen melden, welche von selbst
eine Gelegenheit dazu geben, weil es ei-
gentlich unsre Absicht nicht ist, das practi-
sche

tische in der Arithmetik und Geometrie besonders abzuhandeln. Uebrigens ist das Multipliciren in genannten Zahlen nicht schwer. Wenn man 2 fl. 6 fr. mit 4 fr. multipliciren solle, so macht man die Gulden zu Kreuzern; und addiret die noch dazu gehörige Kreuzer, die Summe wird hernach auf die gewöhnliche Weise multiplicirt. Z. E. 2 fl. machen 120 fr. und 6 fr. dazu, geben 126. Diese multiplicire ich mit 4. Das Product giebt 504 fr. welche ich hernach durch die Division mit 60 wiederum in Gulden verwandele, und was übrig bleibt, in die Classe der Kreuzer besonder setze.

§. 42. Es ist noch übrig, daß wir Wie man in auch die Multiplication in der Buchsta- der Buchsta- benrechnung zeigen. Buchstaben werden benrechnung miteinander ohne das Einmaleins, durch multiplicire 2 bloßes Zusammensetzen multiplicirt. Wenn ich a mit b multipliciren solle, so setze ich a und b zusammen, und sage, das Product ist ab . Eben so ist von a in b und c das Product abc oder bac , oder bca u. s. w. Dann es gilt gleichviel, wo die Buch- Warum es gleichgültig seye, welche Buchstaben in der Multiplication zu erst oder zuletzt stehen. staben stehen, und welcher von ihnen der erste oder der letzte seyn soll. Man könnte auch bey den Zahlzeichen diese Weise zu multipliciren einführen, nur mit dem Unterscheid, daß die Factores durch Punkte, als die Zeichen der Multiplication, miteinander müßten verbunden werden:

Wie man auch die Zahlzeichen nach der Buchstabenrechnungsmethode multipliciren könne?

Was man für besondere Fälle bey dieser Buchstaben-Multiplication zu beobachten habe.

Wie man multiplicire, wenn die Buchstaben Zahlzeichen vor sich haben.

weil sie sonst, wenn sie blos zusammen gesetzt würden, eine andere Bedeutung hätten. Z. E. 6 solle mit 5 multiplicirt werden. Wenn einer nicht wirklich multipliciren mag oder kann, so darf er nur setzen 6. 5, oder 5. 6, oder 6×5 . Das Product von 32 in 245 ist 32. 245; und wenn man es noch einmal mit 15 multipliciren sollte, so heißt es 32. 245. 15. Dieser Methode bedient man sich in mathematischen Schriften nicht selten, besonders wenn man nur die Formeln anzeigt, wie etwas berechnet werden solle; da man dann die wirkliche Arbeit den gemeinen Rechenmeistern vollends überläßt.

§. 43. So leicht nun die erste Hauptregel in der Buchstabenrechnung ist, so giebt es doch auch besondere Fälle, welche man in der Ausübung beobachten muß. Daun es können erstlich Zahlen bey den Buchstaben stehen, hernach giebt es die schon benamfte Fälle, da man nicht immer plus mit plus, sondern auch plus mit minus, und minus mit minus multiplicirt. Wenn die Buchstaben Zahlzeichen vor sich haben, so multiplicirt man gemeynlich die Zahlzeichen nach der gewöhnlichen Regel, und setzt sodann das Buchstaben = Product selbst ihnen unmittelbar nach. Z. E. $3a$ multiplicirt mit $4b$ giebt $12ab$, $5x$ multiplicirt mit $2ab$ giebt $10abx$. u. s. w.

u. s. w. Sind aber die Zahlen groß, daß man sie nicht sogleich im Kopf ausrechnen kann; so verbindet man sie durch das Multiplicationszeichen. Z. E. $204x$ multiplicirt mit $54ab$ giebt im Product $(54.204) abx$. Diese Fälle sind leicht; es giebt aber noch schwerere, welche jezo folgen.

§. 44. Wenn man plus mit plus multiplicirt, so begreift man aus dem bisherigen leicht, daß das Product auch plus oder positiv seyn muß. Multiplicirt man aber plus mit minus, und minus mit minus; so muß man die Regeln für das Zeichen des Products erst suchen. Wir wollen zuerst sehen, was heraus komme, wenn man plus mit minus, oder welches gleich viel ist, minus mit plus multiplicire. Es sey gegeben $a - b$, das solle mit c multiplicirt werden. Das a und das c hat kein Zeichen, folglich ist a und c plus. Denn eine jede Grösse, die zu Anfang steht, und kein Zeichen vor sich hat, ist eben deswegen positiv. Diß gehört zwar noch zur mathematischen Sprache; doch findet es auch hier seinen rechten Platz. Die Mathematikverständigen haben diese Regel unter sich festgestellt: daß sie einer positiven Grösse zu Anfang einer Reihe von Grössen kein Zeichen vorsezen wollen; vermuthlich deswegen, damit die Zeichen nicht gar zu oft vorkommen und allzuviel Platz einnehmen. Wenn also der erste

Wie man plus mit minus multiplicire?

Warum eine jede Grösse zu Anfang gesetzt, wenn sie kein Zeichen vor sich hat, plus seye.

Was heraus
komme, wenn
man plus mit
minus mul-
tiplicire?

Exempel und
Beweis, daß
minus mit
plus minus
gebe.

Buchstabe in einer Rechnung kein Zeichen hat, so ist er allemal positiv, und man darf im Sinne das Zeichen plus hinzudenken. Um nun wieder auf das Exempel $a - b$ multiplicirt mit c zu kommen, so sehen wir sogleich, daß man das a nicht ganz, sondern nur das um ein b verminderte a mit c multipliciren solle. Wenn wir also a mit c multipliciren, und das Product ac setzen, so haben wir es um c zuviel multiplicirt: folglich begreift man schon, daß man von diesem Product etwas abziehen müsse; und zwar weil ich b auch mit c multipliciren solle, gerade das Product bc . Dieses wird also negativ werden. Wenn also plus mit minus multiplicirt wird, so bekommt das Product das Zeichen minus oder wird negativ. Das Product von $a - b$ in c ist also $ac - bc$. Sollte jemand daran zweifeln, so darf er nur die Probe mit Zahlen machen, und z. E. für a setzen einen Sechser, für b einen Zweyer, und für c einen Dreyer so wird er haben $6 - 2$ multiplicirt mit 3 . Das ist nach unserer Regel $6 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 18 - 6 = 12$. Welcher Ausdruck ganz richtig ist, und mit der gemeinen Art zu multipliciren übereinkommt. Dann 6 weniger 2 ist 4 , und 4 mit 3 multiplicirt giebt 12 .

§. 45. Wir wollen aber von dieser Regel noch einen Beweis geben, welcher
uns

uns zugleich zeigen wird, was minus mit minus multiplicirt für in Product habe. Nur müssen wir unsern Lesern vorläufig noch sagen, wie ein regulaires Viereck ausgemessen werde, weil sich der Beweis auf diese geometrische Aufgabe gründet. In der ersten Tafel der geometrischen Figuren, Fig. I. steht ein regulaires Viereck. Man mißt seine Fläche, wenn man die Höhe AB oder Ae mit der Breite AD oder Ai multiplicirt. Nun wollen wir die Höhe Ae des größern Vierecks aus dem Buchstaben a und seine Breite Ai mit dem Buchstaben c bezeichnen. In diesem Viereck stehen oben und auf der Seite noch zwei kleinere Vierecke; das eine heißt Begh, dann so ließt und spricht man nach dem an den vier Ecken geschriebenen Buchstaben ein Viereck aus. Seine Höhe ist Be, welche wir b nennen wollen, und die Breite ist Bh=Ai; also die vorige, die c heißt. Folglich wird das Maas dieses kleinern Vierecks bc seyn. An der Seite steht noch eines, welches DiCh heißt, und zur Breite Di hat; welche wir mit dem Buchstaben d ausdrucken; die Höhe ist die vorige, weil ig gleich Ae ist, folglich wiederum a. Dieses Viereck wird also, wenn man nemlich die Höhe mit der Breite multiplicirt, zu seinem Maasse ad haben. Endlich bleibt noch ein Viereck übrig, welches ABCD heißt, und von den bee-

Was heraus
komme, wenn
man minus
mit minus
multiplicire?

Beispiel und
Beweis, daß
minus mit
minus plus
gebe.

den kleinern Vierecken gleichsam eingefasset ist. Dieses wollen wir nun ausmessen. Die Höhe AB ist $Ae - eB = a - b$, die Länge ist $Ai - Di = c - d$. Folglich wird sein Inhalt seyn $(a - b) \cdot (c - d)$. Nun wollen wir wirklich multipliciren; weil wir schon wissen, was heraus kommen muß, folglich uns im Multipliciren helfen und lernen können, was minus mit minus gebe. Es seye also

$$\begin{array}{r} a - b \\ c - d \\ \hline ac - cb - ad + bd \end{array}$$

Weil alle Buchstaben in einander multiplicirt werden, so findet sich in der Multiplication selbst keine Schwierigkeit, S. 42. aber die Zeichen wissen wir noch nicht alle recht zu setzen. ac muß plus haben, dann plus mit plus giebt plus. cb und ad müssen minus haben, dann plus mit minus giebt minus. S. 44. Was aber bd haben müsse, lernen wir aus der Figur. bd ist das kleine Viereck $Cbdf$. Wenn ich nun von dem grossen ac , oder $Aegi$, abziehe cb und ad , oder $Begh$ und $Digf$, so ziehe ich wirklich, - und zwar gerade das kleine Viereck $Cbdf$ oder bd zu viel ab: demnach muß ich es wiederum addiren, oder mit dem Zeichen plus bemerken. Folglich weiß ich jezo schon, was bd für ein

Zeich

Zeichen haben müßte, und das Exempel wird also heißen:

$$ac - cb - ad + bd.$$

Hieraus mache ich den Schluß, daß minus mit minus multiplicirt plus gebe.

§. 46. Wer diesen geometrischen Lehrsatß noch nicht recht versteht, der kann den obigen Beweis, wenn er die Geometrie durchgelesen hat, noch einmal nachholen, und inzwischen sich durch folgenden Gedanken die Sache einiger massen begreiflich machen. Das minus oder negative muß man sich als eine Schuld vorstellen. Wenn einer demnach — 10 fl. mit — 1 multipliciren soll, so ist es eben so viel, als wenn er 10 fl. Schulden einmal nicht heimgeben oder bezahlen dürfte. Nach geschעהner Multiplication mit — 1 wird er also wirklich um 10 fl. reicher seyn. Sollte er 10 fl. doppelt oder dreynfach, das ist an mehrere Derter hin schuldig seyn, und man sagte ihm, er darf diese zwey- oder dreynmal wieder nicht bezahlen, so würde er abermal um so viel reicher werden. Demnach giebt — 10 fl. multiplicirt mit — 2. das Product + 20 fl. Das ist, 10 fl. Schulden, die man 2 mal nicht bezahlen darf, oder die einem 2 mal geschenkt werden, machen einen wirklich um 20 fl. reicher u. s. w. Nun glaube ich die Sache faßlich genug vorgetragen zu haben.

Anderer und

leichtere Art

zu zeigen, daß

minus mit

minus plus

gebe.

ken. Ich will daher alles, was zur Multiplication in der Buchstabenrechnung gehört, in eine kurze Regel zusammenziehen. Man multiplicirt alle Buchstaben der ersten Keyhe mit allen Buchstaben des Multiplicators, giebt denen, die einerley Zeichen haben, im Product das Zeichen plus, denen aber, die verschiedene Zeichen haben, das Zeichen minus, und addirt endlich die Partialproducte nach den Additionsregeln zusammen. Das ist alles, was von der Multiplication gesagt werden kann. Vorzüglich muß man die kurze Regel behalten: **Einerley Zeichen geben plus; verschiedene minus** (Eadem signa dant plus, diversa minus.) Das ist, plus mit plus, oder minus mit minus multiplicirt, giebt im Product plus: dann plus mit plus, und minus mit minus sind ja einerley Zeichen. Hingegen plus mit minus multiplicirt giebt minus: denn plus und minus sind verschiedene Zeichen. Diese Regel wird auch bei der Division der Buchstaben zu Grunde gelegt, und ist eine von denenjenigen, welche ihren wahren Nutzen haben. In andern Fällen, wo man aus einem Exempel viele Particularregeln herausziehen bemühet ist, bin ich nicht der Meinung, daß man sich den Kopf damit anfüllen solle: dann sie werden nur wieder vergessen, weil sie eines theils zu zahlreich, andern theils

Muthbarkeit
der bey der
Multiplica-
tion vorkom-
menden zwey
kurzen
Hauptregeln:
nemlich ei-
nerley Zei-
chen geben
plus, ver-
schiedene ab-
er minus.

In welchen
Fällen es gut
seye, Regeln
zu geben;
und in welchen
Fällen man
selbiger über-
hoben seyn
könne.

theils nur particular sind. Sinegen je wichtiger, fruchtbarer, allgemeiner, kürzer, einfacher, natürlicher und faßlicher eine Regel ist; desto leichter drückt sie sich dem Gemüthe ein, und destoweniger Mühe braucht man, sie zu behalten. Wir werden bey allen vorkommenden Gelegenheiten solche Regeln anpreisen, die übrigen aber mit Vorbedacht theils übergehen, theils zeigen, daß man sich ohne Noth damit aufhalte. Ich will jeko noch ein Exempel von der Multiplication geben. Man solle multipliciren

$$\begin{array}{r} a - b + c \\ \text{mit } a + b - c \end{array}$$

$$\begin{array}{r} aa - ab + ac \\ + ab - bb + bc \\ - ac + bc - cc \end{array}$$

$$\hline aa - bb + 2bc - cc \quad \text{Summe der Partialproducte.}$$

Dann a mit a gibt aa , a mit $-b$ giebt $-ab$, a mit $+c$ giebt $+ac$; $+b$ mit $+a$ giebt $+ab$, $+b$ mit $-b$ giebt $-bb$, $+b$ mit $+c$ giebt $+bc$; $-c$ mit $+a$ giebt $-ac$, $-c$ mit $-b$ giebt $+bc$, $-c$ mit $+c$ giebt $-cc$. In der Summe heben sich $+ab$ und $-ab$ gegeneinander auf, wie auch $+ac$ und $-ac$. Also bleibt die Summe aller Producte zusammen gezehlt $aa - bb + 2bc - cc$.

Multiplication, wo alle Fälle vorkommen.

Wie man die
Producte
derjenigen
Buchstaben,
die mit sich
selbst multi-
plicirt wer-
den, schreibe
und ausspre-
che.

§. 47. Nun ist noch übrig, daß wir auch zeigen, wie man die Producte schreibet und ausspricht, wenn ein Buchstabe mit sich selbst etlichmal multiplicirt wird. Z. E. wenn ich a mit a multiplicire, so kann ich schreiben aa ; und wenn ich dieses Product noch einmal multiplicire, so heiße es nach der allgemeinen Regel aaa . Allein die Mathematik hat hier einen kürzern Ausdruck erfunden; indeme sie statt aa setzet a^2 , statt aaa , aber a^3 u. s. w. So vielmal nemlich ein Buchstabe mit sich selbst multiplicirt wird, so viel Einheiten muß das von hinten, und zwar etwas oberhalb, angehängte Zahlzeichen, in sich begreifen. Es ist also ein grosser Unterschied zwischen $3a$ und a^3 , jenes heißt überhaupt 3 mal a , dieses aber a mal a mal a . Wie z. E. 3. 10 oder 3 mal 10 nur 30 ist, hingegen 10^3 oder 10 mal 10 mal 10 die Zahl 1000 ausmacht. Man spricht den Ausdruck a^3 aus: a Drey; oder auch, a in der dritten Dignität oder Potenz; wie wir sogleich hören werden. Wenn man also a viermal mit sich selbst multiplicirt, so heißt das Product a^4 ; und wenn man es m mal mit sich selbst multiplicirt, so heißt es a^m , in welchem Falle m bedeuten kann, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, u. s. w. folglich ein allgemeiner Ausdruck ist.

§. 48. Diese Lehre ist besonders wichtig, und breitet ihren Nutzen durch die ganz-

ganze Algebra und höhere Geometrie aus. Wir wollen daher nicht nur die hier vorkommende Namen und Zeichen, sondern auch die Multiplication dieser Potenzen unter und miteinander selbst erklären. Größen, in so ferne sie mit sich selbst multiplicirt werden, heißen Dignitäten oder Potenzen; je öfter sie nun mit sich selbst multiplicirt werden, desto größer werden die Dignitäten. Z. E. a mit a multiplicirt giebt aa , oder a^2 , folglich ist a in der zweiten Dignität; a^3 ist die dritte Dignität von a , a^4 die vierte Dignität u. s. w. Hieraus siehet man, daß a für sich allein, wenn es gar nicht multiplicirt wird, in seiner ersten Dignität stehe, und folglich geschrieben werden könne a^1 : demnach werden die Dignitäten in richtiger Ordnung der gewöhnlichen Zahlzeichen aufsteigen; z. E.

Was Potenzen oder Dignitäten seyen,

warum und wie ferne auch ein nicht multiplicirter oder einfacher Buchstabe und Größe eine Dignität heißen könne;

$a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7$ u. s. w.

Progression der Dignitäten oder Potenzen.

Die Zahlen, die hinter den Buchstaben stehen, heißen Exponenten: also ist 2 der Exponent von a in der andern Dignität; 7 ist der Exponent von a in der siebenden Dignität. Und bey dem Ausdruck $(a+b)^3$ ist 3 der Exponent von $(a+b)$ in der dritten Dignität. Denn man kann auch ganze Summen mit sich selbst multipliciren, in welchem Fall die Summe nur in () eingeschlossen, und hinter das Zeichen oberhalb

Was die Exponenten seyen;

Vorzug dieser erfundenen Namen.

halb der Exponent gesetzt wird. Diese Namen der Dignitäten und Potenzen, die Keppler und Cartesius ausgefunden, sind viel natürlicher, als wenn man nach der Mode der Alten immer Zensus, Zensensus, Zensicubus, Zensifurdesolidus u. s. w. sagt. In der Geometrie heißt die zweite Dignität Quadrat, die dritte Cubus; was aber weiter hinaus geht, behält die von uns schon erklärte Namen bey. Den Grund von dem Namen des Quadrats und des Cubus wollen wir zu seiner Zeit erklären und anführen.

Wie man die Dignitäten oder Potenzen mit einander multiplicire.

§. 49. Nachdem wir die hier vorkommende Namen erklärt haben, müssen wir auch zeigen, wie man die Dignitäten mit einander multiplicirt. Z. E. ich solle a^3 mit a^2 multipliciren. Die Sache ist leicht, wenn ich die allgemeine Regel der Multiplication §. 42. hier anwende. Damit wir aber deutlicher davon überzeugt werden, so wollen wir a^3 und a^2 nach der angeführten Regel schreiben und sagen, aaa solle mit aa multiplicirt werden. Nun werden die Buchstaben nur zusammengesetzt §. 42. folglich wird das Product seyn $aaaaa$; das ist, nach einem kurzen Ausdruck a^5 . Ferner ich solle a^1 mit a^2 , oder a mit aa , multipliciren, so habe ich aaa , das ist, a^3 ; ich solle a^4 mit a^5 , das ist $aaaaa$ mit $aaaaa$, multipliciren, so

so ist das Product $aaaaaaaaa$, oder a^9 .
 Da nun $a^2 \cdot a^3 = a^5$, $a^1 \cdot a^2 = a^3$, a^4 . Auflösung
 $a^5 = a^9$, so kann ich eine leichte Regel aus und Beweis.
 diesen Exempeln nicht nur, sondern aus
 der Natur der Multiplication in Buch-
 staben §. 42. herausziehen, und ohne noch
 was von den Logarithmen zu wissen, aus
 sichern Gründen sagen: man multiplici- Die Multi-
 ret die Dignitäten von einerley Be- plication der
 nennung, wenn man ihre Exponen- Potenzen
 ten zusammen addirt. Es müssen aber wird in eine
 Dignitäten von einerley Benennung oder Addition ih-
 von einerley Buchstaben seyn: z. E. a^3 . rer Exponen-
 a^7 wird a^{10} ausmachen. Hingegen x^3 ten verwand-
 multiplicirt mit y^2 ist eben x^3y^2 , weil ich delt.
 hie zweyerley Buchstaben habe; und al-
 so die Exponenten weder des x noch des y
 zusammensetzen kann. Dann wann ich
 die allgemeine Regel zu Rath ziehe, so fin-
 de ich, daß ich xxx mit yy multipliciren sol-
 le; diß giebt nun ein Product $= xxxyy$
 oder x^3y^2 . Wenn ich aber x^3 mit x^2
 multiplicire, so ist das Product x^5 , und
 wenn ich y^3 mit y^2 multiplicire, so habe
 ich y^5 . Diese Regel muß man sich wohl
 bekannt machen, wenn man in dem fol-
 genden fortkommen will. Sie heißt noch,
 malen also: Dignitäten von einerley Be-
 nennung werden multiplicirt, wenn man
 ihre Exponenten addirt, und die Summe
 davon der einfachen Dignität von hinten
 anhängt. Z. E. $b^3 \cdot b^6 = b^9$, $c^4 \cdot c^{10} =$
 c^{14} .

Warum die
Potenzen in
diesem Fall
einerley Be-
nennung
haben.

Weitere An-
wendung der
gegebenen
Regel;

c¹⁴. Gesezt aber ich sollte a^m multipliciren mit a^n , wenn nemlich der Exponent eine unbestimmte allgemeine Grösse ist; was ist alsdenn zu thun? Hier bleibe ich wieder bey meiner Regel, und sage das Product wird seyn: a^{m+n} . Ich addire nemlich die 2 Exponenten zusammen, und setze sie dem Buchstaben oberhalb nach, wie ich die Zahlen gesezt habe. Ferner: wenn ich x^m mit x^n und noch einmal mit x^r multipliciren soll, so wird das Product seyn x^{m+n+r} . Eben so ist y^m multiplicirt mit y^3 im Product y^{m+3} . Aus diesen Exempeln siehet man, daß eine allgemeine Regel auch solche Fälle bestimme, die der Einbildungskraft nicht so klar vorgestellt werden können, wie z. E. es in der vorhabenden Materie bey den Zahlen geschehen ist, welche wir alle auf die allgemeine Regel §. 42. reducirt haben.

Ihre große
Ausbarkeit.

Wie man eine
gegebene
Potenz zu einer
höhern
erheben solle;

§. 50. Wie man die Dignitäten mit einander multipliciren kann, so läßt sich auch eine Dignität zu einer höhern durch die Multiplication erheben. Z. E. ich kann nicht nur x mit sich selbst multipliciren, und durch die Multiplication zur zweiten Dignität xx oder x^2 erheben; sondern auch xx selbst wiederum 2, 3, oder mehrmalen mit sich multipliciren, und also zur zweiten, dritten Dignität u. s. w. erheben. Wenn ich xx dreymal mit sich selbst multiplicire, so habe ich $xxxxxx$,
oder

oder x^6 ; wenn
selbst multiplicirt
 a^6 , welches die
ist, die sechste
läßt sich überma-
che die folgende 1
ten werden

Kürzung
und Erweit:

wenn man ihre Exponenten mit ein- ^{geschiebet}
ander multiplicirt. Z. E. ich solle a^3 in die ^{4te} Dignität erheben, so darf ich nur den ^{Exponenten} 3 mit dem gegebenen Ex-
ponenten 4 multipliciren, da ich dann
 a^{12} habe. Denn wenn ich a^3 vier-

mal mit sich selbst multiplicire, so habe
ich gerade a^{12} . Folglich wenn ich a^m zur
Dignität r erheben solle; so wird die neue
Dignität nothwendig heißen a^{mr} ; eben
so ist x^2 zur Dignität m erhoben $= x^{2m}$
und y^m zur Dignität 3 erhoben $= y^{3m}$.

weitere An-
wendung und
Nutzbarkeit
dieser Regel.

Auch diese Regel ist, wie die vorige, von be-
sonderm. Gewichte. Beebe werden bey
der Division wieder vorkommen, da sich
dann schon der Anfang ihrer Nutzbarkeit
zeigen wird.

§. 51. Dividiren heißt eine Zahl von ^{Was dies}
einer andern gegebenen Zahl etlichmal ab- ^{dividen heißt,}
ziehen, oder eine gegebene Zahl etlichmal
kleiner machen. Z. E. ich solle 6 durch 2
dividiren; so muß ich 2 von 6 so oft abzie-
hen als ich kann, und hernach besonders
merken, wie oft ich die Zahl 2 von 6 ab-
gezogen habe. Ich kann sie nemlich 3
mal

und wie sie
nur in einer
Kunstgewisse
gegebene
Zahlen
schneller, als
sonsten, zu
subtrahiren,
bestehe.

n 2 von 6 läßt vier, 2
n 2 läßt nichts. Diese
rossen Exempeln allzu
at daher eine Kunst
in erfunden, davon ich
e, wenn ich vorher ge

zeigt, daß sich auch die andere Erklärung
der Division hieher schicke. Ich solle die
Zahl 6 erstlichmal kleiner machen. Nun
wird mir eine Zahl gegeben, welche an-
zeigt, wie vielmal kleiner sie werden solle,
z. E. 2mal. Wenn ich nun sagen kann,
wie die Zahl heiße, welche 2 mal kleiner
als 6 seye, so habe ich 6 durch 2 dividirt.
Im gegenwärtigen Fall ist es die Zahl
drey. Man merke hier den Unterschied
zwischen der Redensart um wie viel, und
um wie vielmal. In der Subtraction
finde ich, um wie viel eine Gröſſe kleiner
worden seye; so ist z. E. 6, wenn es um 2
kleiner wird, 4: in der Division hingegen
merke ich, um wie viel mal etwas klei-
ner werde. Hieraus siehet man auch zu-
gleich, daß die gefundene Zahl in der ge-
gebenen gröſſern so oft enthalten seyn
müsse, als in der gegebenen kleinern Ein-
en enthalten ist. Dann die gefundene Zahl
3 ist in 6 zweymal, und eins in 2 auch
zweymal enthalten. Die Haupte-
namen, die man bey der Division braucht,
sind die zu dividirende Zahl, oder der
numerus dividendus, der Divisor, und

der Quotient. Was die zu dividirende Zahl sene, ist vorhin klar. Der Divisor ist die Zahl, welche anzeigt: wie vielmal eine gegebene Zahl kleiner gemacht werden solle. Der Quotient ist die Zahl, welche durch diese erstlichmalige Verminderung gefunden wird und heraus kommt, oder welche so vielmal kleiner ist als die zu dividirende Zahl, um so vielmal eins kleiner ist als der Divisor; das ist, welche in der zu dividirenden Zahl so oft enthalten, als eins in dem Divisore. Die Rede ist hier von ganzen Zahlen, wie auch bey der Multiplication nur ganze Zahlen vorkommen. Von gebrochenen Zahlen werden wir im nächsten Capitel reden.

Erklärung
der bey der
Division vorkommenden
Namen des
Divisors, des
Quotienten
u. s. w.

§. 52. Nun können wir schon zeigen, wie die wirkliche Division geschehe. Man setzt den Divisor unter die zu dividirende Zahl, und zwar zur Linken, oder unter die erste und am meisten bedeutende Zahlzeichen zuerst, doch so, daß, wenn das erste Zahlzeichen des Divisors grösser ist als das erste Zahlzeichen der zu dividirenden Zahl, der Divisor um eine Stelle hinter sich gerückt werde. Hernach sucht man durch das Einmal eins, wie oft der Divisor in den gerade oben geschriebenen Zahlen ungefähr enthalten sene, und schreibt die gefundene Zahl hinter einen nach der Stelle der Einheiten gezogenen Strich; wenn sie nun mit dem Divisor

Wie die
wirkliche Di-
vision gesche-
he.

und zwar zu-
erst mit ein-
fachen Zahl-
zeichen,

Was unter
sich dividiren
heisse, und in
welchen Fäl-
len diese Art
zu dividiren
besser seye,
als die gleich
folgende?

multiplicirt nicht grösser wird, als die unmittelbar obenstehende Zahlen, so ist sie der rechte Quotient. Das Product des Quotienten in den Divisor wird von den sich darauf beziehenden obern Zahlen subtrahirt, und sodann der Rest von neuem nach eben dieser Regel dividirt, bis man auf die letzte Classe der Einheiten kommt. Dieses kann nun auf zweyerley Art bewerkstelliget werden: dann entweder dividirt man unter sich, oder über sich. Die erste Art ist leichter; wir wollen sie also vor der zweiten erklären. Man solle 548 dividiren durch 2; das Exempel wird folgender massen gesetzt:

$$\begin{array}{r|l}
 548 & 274 \\
 (2).. & \\
 \hline
 4.. & \\
 \hline
 14. & \\
 (2). & \\
 \hline
 14 & \\
 \hline
 8 & \\
 (2) & \\
 \hline
 8 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Ich sage: 2 in 5 ist 2 mal enthalten; setze daher den Zweyer in die Stelle des Quotienten, und multiplicire den Quotienten mit dem Divisor; das Product 4 ziehe ich von 5 ab, und setze zum Rest 1 noch die

die folgende Zahl. Dann rücke ich den Divisor eine Stelle weiter zurück, und sage 2 in 14 ist 7 mal enthalten; den Quotienten 7 multiplicire ich wieder mit dem Divisor 2, und subtrahire das Product 14, welches gerade aufgeht. Endlich setze ich das Zahlzeichen 8 herunter, und dividire nochmals mit 2; da dann der Quotient 4 ist, und das Product 8 wiederum aufgeht: folglich ist der ganze Quotient 274. Nun kann man eben dieses Exempel auch über sich dividiren, in welchem Fall es also gesetzt wird:

Was über
sich dividiren
seye?

$$\begin{array}{r|l} x & \\ 2 & 274 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Hier sage ich, 2 in 5 habe ich 2 mal; (setze also 2 in die Stelle des Quotienten) 2 mal 2 ist 4, 4 von 5 läßt 1; (streiche daher den 2 und 5 aus, und schreib über den Fünfer den Einsen.) Dann setze ich den Divisor unter die folgende Stelle, und sage abermal, 2 in 14 habe ich siebenmal; denn der Einsen gilt hier noch; und da der Vierernach steht, so heißt die Zahl 14; worben man sich gewöhnen muß, Zahlen aussprechen zu lernen, die oft 2 bis 3 Zoll hoch stufenweis übereinander stehen; man spricht sie aber eben so aus, wie die Zahlen im Numeriren ausgesprochen werden;) 7 setze ich in die Stelle des Quotienten, und sage: 7 mal 2 ist 14, 14 von 14 geht auf;

auf ; dann streiche ich den Vierer und Einser aus. Endlich setze ich den Divisor unter den Achter , und sage 2 in 8 habe ich 4 mal , setze 4 in die Stelle des Quotienten , und sage abermal : 2 mal 4 ist 8 , 8 von 8 geht auf ; und streiche den 8 und 2 vollends aus. Diß heißt über sich dividiren. In kleinen Exempeln , besonders wo der Divisor nur eine einfache Zahl ist , kann man diese Art für bequemer halten , und der ersten , wegen ihrer Kürze , vorziehen ; hingegen in grösseren Exempeln wird durch das viele Ausstreichen manchmal Verwirrung entstehen , welche bey dem unter sich gehenden Dividiren verhütet wird. Ehe ich nun weiter gehe , muß ich zeigen , daß man wirklich durch die angeführte Methoden dasjenige erhält , was man verlangt. Man will wissen , wie oft 2 in 548 enthalten seye : weil nun 548 gleich ist $500 + 40 + 8$, so suche ich zuerst , wie oft 2 in 500 enthalten seye ; da finde ich dann leicht , daß es 200 mal enthalten , und 100 für die folgende Stelle übrig bleibe ; ich setze also 200. Hernach forsche ich , wie oft 2 in $100 + 40$, oder 140 enthalten seye , die Antwort ist 70 mal ; dann ich darf 140 nur als 14 Zehner betrachten , so finde ich , daß sie durch 2 getheilt 7 Zehner geben ; diese setze ich auch besonders. Endlich suche ich noch , wie oft 2 in 8 Einheiten enthalten seye ; Antwort , 4mal ;

In welchen Fällen diese Methode vorzuziehen.

Beweis der Divisionsregeln,

4mal: folglich ist der ganze Quotient $200 + 70 + 4$, das ist 274. Hieraus ist klar, daß ich mir nur unnöthige Mühe machen würde, wenn ich allemal sagen wollte: wie oft ist der Divisor in so viel Tausendern, in so viel Hundertern, in so viel Zehnern u. s. w. enthalten ic. indeme die Stellen der Zahlzeichen selbst nach der Decimalprogreßion, wie wir im ersten und ihr Vortheil, Zeit und Mühe zu sparen, als bloß einfache Zahlzeichen ansehe und ausspreche. Inzwischen ist dieses der Beweis von der Division, welcher sich auf alle nur mögliche Exempel anwenden läßt.

§. 53. Man muß auch mit zwey und Wie man mit noch mehr Zahlzeichen dividiren können. zwey und mehreren einigen Exempel geben. Hier wird man sehen, wie bequem die Manier unter sich Zahlzeichen dividire. zu dividiren seye. Man solle 64285 durch 25 dividiren. Ich setze die Zahl und ihren Divisor nach der gegebenen Regel:

104 Arithm. II. Cap. Von den

$$\begin{array}{r|l}
 64285 & 2571\frac{10}{25} \\
 (25) \dots & \\
 \hline
 50 \dots & \\
 \hline
 142 \dots & \\
 (25) \dots & \\
 \hline
 125 \dots & \\
 \hline
 178 \dots & \\
 (25) \dots & \\
 \hline
 175 \dots & \\
 \hline
 35 & \\
 (25) & \\
 \hline
 25 & \\
 \hline
 10 \text{ Rest} &
 \end{array}$$

Hier sage ich: 2 in 6 könnte ich zwar dreymal nehmen, aber wegen dem folgenden fünfer darf ichs nur 2 mal nehmen, (denn 25 ist in 64 nur zweymal enthalten,) setze also 2 in die Stelle des Quotienten, und sage 2 mal 25 giebt 50; 50 von 64 läßt 14. Zu dieser Zahl setze ich den folgenden Zweyer herunter, und schreibe meinen Divisor abermal so, daß sein letztes Zahlzeichen zur Rechten unter das letzte Zahlzeichen der zu dividirenden Zahl ebenfalls zur Rechten zu stehen komme; alsdann dividire ich wieder, und sage 2 in 14 könnte ich 7 mal, aber wegen dem folgenden fünfer kann ichs nicht so oft nehmen; ich will es also versuchen, und ihn fünfmal nehmen, weil 25 in 142 wenigstens 5 mal enthalten seyn

seyn muß; dieses gehet nun an: darum schreibe ich 5 in die Stelle des Quotienten, und sage wieder: 5 mal 25 ist 125, 125 von 142 läßt 17. Sodann setze ich das folgende Zahlzeichen 8 herunter, und ver-
 fahre wie bisher: am Ende bleibt nun nach ^{wie dasjenige, was etwas nach geschehener Division übrig bleibt, genant} geschehener völliger Division ein Rest ^{net werde;} übrig, der sich nicht mehr durch 25 dividiren läßt. Es giebt also einen Bruch, und heißt $\frac{10}{25}$. Will man die Probe machen, ob man recht gerechnet habe; so darf man nur den ganzen Quotienten mit dem Divisor multipliciren, und zum Product den übrig gebliebenen Rest addiren. Wann ^{was die Probe der Division seye.} die zu dividirende Zahl wieder völlig herauskommt, so hat man recht gerechnet. Eben das von uns gerechnete Exempel siehet in der über sich gehenden Division also aus:

$$\begin{array}{r|l}
 \times (1 \\
 25 \overline{) 6485} & 2571 \\
 \underline{50} & \\
 14 & \\
 \underline{125} & \\
 17 & \\
 \underline{125} & \\
 17 &
 \end{array}$$

wie man mit zwey und mehr Zahlen über sich dividiret.

Denn ich sage, 25 in 64 habe ich 2 mal; ^{Erste Methode} 2 mal 5 ist 10, 0 von 4 bleibt 4, behalt eins; 2 mal 2 ist 4 und 1 behalten ist 5, 5 von 6 läßt 1. 25 in 142 habe ich 5 mal; 5 mal 5 ist 25, 5 von 2 kann ich nicht, entlehne also eins von 4, und sage, 5 von 12 läßt 7, behalt 2; der Vierer wird weg-
 5 5 gen

106 Arithm. II. Cap. Von den

Zweite und
gemeine Me-
thode,

gen dem Entleihen zum Dreier; 5 mal 2 ist 10 und 2 behalten ist 12, 12 von 13 läßt 1. 25 in 178 habe ich 7 mal und so weiter. Diese Methode hat Herr Baron von Wolf in seinen Anfangsgründen gebraucht. Nach der allergemeinsten Weise bekommt endlich das Exempel auch diese Gestalt:

$$\begin{array}{r}
 \cancel{2}\cancel{2}3(1 \\
 \cancel{2}\cancel{2}\cancel{2}3(0 \\
 \cancel{8}\cancel{8}\cancel{2}88 \mid 2571 \\
 \cancel{2}\cancel{5}\cancel{5}\cancel{5}\cancel{5} \mid \\
 \cancel{2}\cancel{2}\cancel{2}
 \end{array}$$

Denn ich sage: 2 in 6, 2 mal; 2 mal 2 ist 4, 4 von 6 läßt 2; 2 mal 5 ist 10, 1 von 2 läßt 1, 0 von 4 läßt 4. ferner 2 in 14, 5 mal; 2 mal 5 ist 10, 1 von 1 geht auf, 0 von 4 bleibt 4; 5 mal 5 ist 25, 2 von 4 läßt 2; 5 von 2 kann ich nicht, entlehne also 1 von 2; streiche es sogleich aus, und setze 1 darüber; 5 von 12 läßt 7. 2 in 17 habe ich 7 mal, 2 mal 7 ist 14, 1 von 1 geht auf; 4 von 7 läßt 3; 5 mal 7 ist 35, 3 von 3 geht auf, 5 von 8 läßt 3. Endlich 2 in 3 habe ich 1 mal; 2 mal 1 ist 2, 2 von 3 läßt eins; 1 mal 5 ist 5; 5 von 5 geht auf, oder läßt 0. Der Rest wird in () eingeschlossen. Diese Methoden nun kann man, wegen den ausgestrichenen Zahlen, nicht ohne mündlichen Unterricht vollkommen lernen: weil
nem

warum man
zu Erlernung
der letztern
zwo Metho-
den einen le-

nehmlich alle Zahlen ausgestrichen sind, und ein Anfänger durch einen bloß schriftlichen Unterricht es nicht sogleich einseheth, welche Zahlen hie und da noch in der Operation gelten. Was aber die Art unter sich zu dividiren betrifft; so hat man keinen lebendigen Lehrmeister dazu nöthig, wenn man auf das, was wir gesagt haben, Achtung geben will. Wer nun mit 2 Zahlen dividiren kann, der kann es auch mit 3 und mit noch mehrern.

lebendigen
Lehrmeister
nöthig habe.

Uebrigens was einer für eine Methode von Jugend auf gelernt hat, dabey wolle er bleiben, damit er sich nicht bey Erlernung vielerley Methoden in Verwirrung bringe. Denn alle Manieren zu dividiren führen zu einerley Zweck, und beruhen auf dem §. 52. gegebenen Grund. Kommen bey der Division in der zu dividirenden Zahl Nullen vor; so hat man, wenn man nicht wirklich dividiren kann, oder wenn der Rest, ehe die Division zu Ende gebracht

Wie man bey
Erlernung
der Divi-
sions-Manie-
ren sich vor
Verwirrung
hüten solle.

ist, allzuflein wäre, weiter nichts zu thun, als daß man in die Stelle des Quotienten, um den Werth des folgenden Zahlzeichens nicht zu groß zu machen, eine Null setz, und sodann den Divisor um eine Stelle weiter vorrückt. Z. E. wenn ich 609 dividire durch 3, so ist die ganze Operation diese:

Was man zu
thun, wenn
in der zu di-
vidirenden
Zahl Nullen
oder auch
kleinere Zahl-
zeichen, als
der Divisor
hat, vorkom-
men.

$$\begin{array}{r|l} 203 & 609 \\ 3 & 609 \end{array}$$

Denn

Denn ich sage: 3 in 6 habe ich 2 mal, 3 in 0 nullemal, 3 in 9, 3 mal. Eben so geht es, wenn ich 627 durch 3 dividire:

$$\begin{array}{r|l} 627 & 209 \\ 333 & \end{array}$$

3 in 6 habe ich 2 mal, 3 in 2 nullemal, 3 mal 0 ist nulle, 0 von 2 läßt 2, 3 in 27 giebt 9 mal. Sollten aber im Divisore Nullen seyn, so können sie entweder in der Mitte oder am Ende stehen; im ersten Fall werden sie, wie in der Multiplication, behandelt; z. E.

Wie man dividire, wenn der Divisor Nullen in sich enthält, und zwar erstlich in der Mitte,

$$\begin{array}{r} 48.08 \overline{) 23} \\ (204) \overline{) 408} \\ \underline{728} \\ (204) \overline{) 612} \\ \underline{116} \text{ Rest.} \end{array}$$

zweitens am Ende; da dann eine oder mehr Nullen vorkommen können.

Stehen sie aber am Ende des Divisors, so werden sie abgeschnitten, und die Division wird mit den bloßen Zahlzeichen verrichtet. Z. E. Man solle 34086 durch 1000 dividiren, so ist der Quotient $34\frac{86}{1000}$ oder $34 \overline{) 086}$; weil 1 gar nicht dividiret, und die Nullen nur die Plätze ausfüllen müssen. Eben so ist 63582 durch 3000 divi-

dividirt, = $\begin{array}{r|l} 63 & 482 \\ 3 & 100 \end{array}$, das ist, wenn
man wirklich dividirt,

$$\begin{array}{r|l} 3 & 482 \\ 3 & 000 \end{array} \quad 21 \overline{) 3000} \quad \begin{array}{r} 482 \\ 3000 \end{array}$$

Man dividirt nemlich blos mit 3, wenn man vorhero am Ende gleichviel Zahlzeichen, als Nullen der Divisor hat, abschneidet, und sagt 3 in 6 ist 2 mal, 3 in 3 einmal; das übrige giebt einen Bruch. Die Ursache ist leicht zu verstehen; die abgeschnittene Zahlzeichen sind immer kleiner als der Divisor, weil allemal von der zu dividirenden Zahl ein Zahlzeichen weniger, als der Divisor Zeichen hat, abgeschnitten wird. Folglich läßt sich der Rest niemals durch den ganzen Divisor theilen. Wer aber daran zweifelt, darf nur die Rechnung nach der allgemeinen Regel machen. Z. E.

Warum man am Ende der zu dividirenden Zahl so viel Zahlzeichen, als der Divisor am Ende Nullen hat, abschneiden dürfe,

$$\begin{array}{r|l} 63482 & 21 \overline{) 3000} \\ (3000) & \\ \hline 6000 & \\ \hline 3482 & \\ (3000) & \\ \hline 3000 & \\ \hline 482 & \end{array}$$

Woraus deutlich erhellet, daß man allemal so viel Zahlzeichen, als Nullen dem

Div

Divisor angehängt sind, abschneiden dürfen, wenn man nicht ohne Noth längere Zeit und Mühe zu einem Exempel von dieser Art gebrauchen will.

Von der Division der genannten Zahlen.

§. 54. Die Division der genannten Zahlen wird eben so eingerichtet, wie die Multiplication; das heißt, man bringt die zu dividirende Zahlen vorher unter einerley Benennung, und macht die Gulden zu Kreuzer, die Ruten zu Schuh, die Schuhe zu Zoll u. s. w. und dividirt sodann nach der Regel §. 52. Demnach werden 3 fl. 24 kr. durch 15 dividirt, wenn ich die Gulden durch die Multiplication mit 60 zu Kreuzer mache, und zu 3 mal 60 die 24 addire, hernach gewöhnlicher massen mit 15 dividire; nemlich

$$\begin{array}{r}
 180 + 24 = 204 \text{ kr.} \\
 \hline
 15 \quad \quad 15 \quad \quad \times 5 \times \quad | \quad 13 \frac{2}{5} \text{ fr.}
 \end{array}$$

§. 59

Sollte ein Quotient herauskommen, der grösser wäre als 60, so mache ich in diesem Fall durch die Division die Kreuzer wieder zu Gulden, und was übrig bleibt, setze ich in die Classe der Kreuzer. Und das ist nun das vornehmste, was von der Division in ungenannten und genannten Zahlen vorgetragen werden kann. Ehe wir

wir die Division nach der Buchstabenrechnung abhandeln, wollen wir vorher noch, unserer Gewohnheit gemäß, einige jedermann faßliche und leichte Sätze aus den bisherigen Regeln nachholen. Der erste ist: Eins dividirt nicht; folglich ist $\frac{6}{1}$ oder 6 dividirt durch eins = 6. Wo nur Ein Erbe ist, da hat man keine Theilung nöthig; das heißt, Eins dividirt nicht. So gemein dieser Satz ist, so nützlich wird er uns im folgenden werden. Wie-
derum eine durch sich selbst dividirte Zahl giebt den Quotienten Eins; das ist der zweyte Satz. $\frac{6}{6}$ oder 6 dividirt durch 6 ist eins; 3 in 3, 20 in 20, 100 in 100 ist nur einmal enthalten. Auch dieser leichte und faßliche Satz wird uns in Zukunft zu nützlichen Folgen Gelegenheit geben: Er heißt noch einmal also: Eine durch sich selbst dividirte Zahl giebt Eins. An diesen zween Sätzen wollen wir jezo genug haben, und nun auch die Division der Buchstaben vortragen.

Einige leichte und gemeine Regeln, nebst ihrer Nützlichkeit, werden vortragen.

Eins dividirt nicht, und eine Zahl durch sich selbst dividirt wird eins.

§. 55. In der Buchstabenrechnung werden die Gröſſen entweder durch bloſe Zeichen, oder wirklich durch die Absonderung und Auflösung der in der Multiplication geschehenen Verbindung dividirt. Der erste Fall ist leicht. Sollte ich a durch b dividiren, so schreibe ich bloß $\frac{a}{b}$

von der Division der Buchstaben.

erster Fall, wenn die Division bloß

oder

durch Zeichen
bemerkt
wird.

oder $a : b$. Eben so wenn ich $ab + cd$ divi-
diren solle durch $x - y$, so ist der Quotient

$$\frac{ab + cd}{x - y}$$

oder $(ab + cd) : (x - y)$

$$x - y$$

Zweiter Fall,
wenn man
wirklich divi-
diren kann.

folglich wird die Sache blos durch die
Zeichen ausgedruckt, welche ich in der Ein-
leitung von der mathematischen Sprache
vorgetragen habe. Der andere Fall ist
auch nicht sonderlich schwer. Dann wie
die Buchstaben durch die Multiplication
verbunden werden, so werden sie durch
die Division wieder abgesondert; nun
werden sie durch jene Operation blos zus-
ammengesetzt S. 42. folglich muß man
sie durch diese wieder von einander trennen,
und den einen der getrennten Buchstaben in
die Stelle des Quotienten setzen. Z. E. ab
soll dividirt werden durch a , so ist der Quo-
tient b , oder durch b , so ist der Quotient a ;
oder es ist

$$\begin{array}{c|c} ab & b \end{array} \text{ und } \begin{array}{c|c} ab & a \\ \hline a & b \end{array}$$

wie $\begin{array}{c|c} 6.3 & 3 \\ \hline 6 & \end{array}$ und $\begin{array}{c|c} 6.3 & 6 \text{ ist.} \\ \hline & 3 \end{array}$

Denn wenn man beederseits den Divisor
mit dem Quotienten multiplicirt, so hat
man die zu dividirende Zahl wieder; nem-
lich b mal a ist ab , und a mal b ist ab ; und
 3 mal $6 = 6.3$ und 6 mal $3 = 6.3$. Nach
dieser Regel werden alle Exempel in der
Buch

Buchstabenrechnung gerechnet: also ist aab dividirt durch ab im Quotienten a ; abc dividirt durch ac ist b ; u. s. w.

$$\begin{array}{r|l} aab & a \\ (ab) & \\ \hline aab & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} abc & b \\ (ac) & \\ \hline acb & \end{array}$$

Denn im Product ist es gleichviel, wo die Buchstaben stehen, wann sie nur neben einander stehen; so ist $abc = acb = cba$, u. s. w. wie wir schon gesagt haben.

Weil nun $\frac{ab}{b} = a$, und $\frac{ab}{a} = b$, nach den Multiplicationsregeln §. 42. so ist nothwendiger Weise auch $\frac{a}{b} \cdot b = a$; denn man darf nur nach den Grundsätzen der Einleitung schreiben

$$\frac{ab}{b} = a$$

$$\frac{ab}{b} = \frac{a}{b} \cdot b$$

$$\frac{a}{b} \cdot b = a;$$

Da nun diese

Rechnung allgemein ist, so wird $\frac{m}{n} \cdot n = m$,

$$\frac{ab}{mn} \cdot mn = ab; \quad \frac{acd}{b} \cdot b = acd \text{ u. s. m.} \quad \text{Das}$$

ist, eine Zahl durch eine andere dividirt, und

und durch eben diese wieder multiplicirt, wird der gegebenen Zahl gleich seyn.

Was für Nebenfälle bey der Buchstabendivision noch vorkommen können.

§. 56. Nun können bey dieser Operation eben die Nebenfälle noch vorkommen, deren wir schon bey der Multiplication gedacht haben. Das ist: Es kann geschehen, daß man nicht nur plus mit plus, sondern auch minus mit minus, und plus mit minus, oder welches gleichviel ist, minus mit plus dividiren solle. Hier nun hat die Division einerley Regeln mit der Multiplication. Denn weil sie eine bloße Auflösung der durch die Multiplication verbundenen Buchstaben ist, und die Auflösung auf gleiche Weise geschehen muß, wie die Verbindung geschehe; so muß man beiderseits nach einerley Regeln handeln, und auch bey der Division merken, daß einerley Zeichen plus und verschiedene im Quotienten, wie bey der Multiplication im Product, minus geben. Z. E. ich solle $aa - ad$ dividiren durch a , so ist der Quotient $a - d$; dann

Wie man minus mit plus dividire.

Auflösung und

• Beweis.

$$\begin{array}{r}
 aa - ad \mid a - d \\
 (a) \quad \mid \\
 aa \\
 \hline
 - ad \\
 (a) \\
 ad \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

a in aa ist a mal; a mal a ist aa , aa von aa geht

aa geht auf; nun setze ich $-ad$ unter den Strich, und brauche meinen Divisor wiederum, wie bey den Zahlen. a in $-ad$ ist $-d$, $-d$ mit $+$ a giebt $-ad$, $-ad$ von $-ad$ geht auf. Wenn ich a in $-ad + d$ mal genommen hätte, so wäre mein Product $+ad$ geworden, und das hätte sich gegen $-ad$ durch die Subtraction nicht aufheben lassen. Da es nun zwischen $-$ und $+$ kein drittes giebt, so ist klar, daß verschiedene Zeichen in der Division, wie in der Multiplication, minus geben. Die Probe ist leicht zu machen. Man multiplicire nur den Quotienten $a-d$, mit a , so wird $aa-ad$ herauskommen: welches abermal, weil diese Probe auf die Erklärung der Division sich gründet, einen richtigen Beweis giebt, daß, wenn man minus mit plus dividirt, der Quotient minus oder negativ werde.

S. 57. Eben so können wir erweisen, daß minus durch minus dividirt plus gebe. Man solle $aa-ad$ mit $-a$ dividiren, so werde ich sagen müssen

Wie man minus mit minus dividirt.

$$\begin{array}{r}
 aa-ad \quad | \quad -a+d \\
 (-a) \quad | \\
 \hline
 aa \\
 \hline
 -ad \\
 (-a) \\
 +ad \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Auflösung

und
Beweis.

— a in $+aa$ ist — a mal §. 56; — a mit — a multiplicirt giebt $+aa$, §. 45. $+aa$ von $+aa$ geht auf; — a in — ad ist $+d$ mal; $+d$ mit — a multiplicirt ist — ad ; — ad von — ad geht auf. Dann wann ich — a in — ad wollte — d mal nehmen, so würde das Product aus — d in — a positiv und $+ad$ werden, §. 45. $+ad$ aber läßt sich in der Subtraction gegen — ad nicht aufheben. Eben dieses sieht man auch in der Probe: denn der Quotient — $a + d$, multiplicirt mit dem Divisor — a , bringt gerade wieder die zu dividirende Zahl heraus, nemlich $aa - ad$. Wenn man nun ein grosses Exempel dividiren solle, so wird man durch die Beobachtung der vorgetragenen Regeln so leicht oder noch leichter zurechte kommen, als bey der Division in ungenannten Zahlen. Ob nun schon grosse und weitläuftige Exempel in der Buchstabendivision selten vorkommen, und man meistens durch eine allgemeine Formel das, was zu dividiren ist, blos anzeigt: so wollen wir doch eines geben, und alle Regeln dabey anzu bringen suchen. Vorhero solle aber folgendes noch vorangeschickt werden

$$\begin{array}{r}
 aa - bb \mid a + b \\
 (a - b) \mid \\
 aa - ab \\
 \hline
 + ab - bb \\
 (a - b) \\
 ab - bb \\
 \hline
 \hline
 0
 \end{array}$$

Wie man
große Exem-
pel in der
Buchstaben-
rechnung di-
vidire.

a in aa hab ich a mal; a mal a ist aa , a mal $-b$ ist $-ab$, aa von aa geht auf; $-ab$ von keinem gleichen Product läßt S. 34. nach Veränderung der Zeichen $+ab$. a in ab habe ich b mal; b mal a ist ab und b mal $-b$ ist $-bb$; ab von ab geht auf, $-bb$ von $-bb$ geht auf. Eben so lassen sich auch grössere Exempel dividiren; wir wollen eines hersetzen:

$$\begin{array}{r}
 aa - bb - 2ac + cc \mid a + b - c \\
 (a - b - c) \mid \\
 aa - ab - ac \\
 \hline
 + ab - bb - ac + cc \\
 (a - b - c) \\
 + ab - bb - bc \\
 \hline
 \hline
 + bc - ac + cc \\
 (a - b - c) \\
 - ac + bc + cc \\
 \hline
 \hline
 0
 \end{array}$$

Wer sich das unmittelbar vorhergehende Exempel und die allgemeine Regeln der Division bekannt gemacht hat, wird das, was man dazu auszusprechen hat, von selbst

solche Exem-
pel kommen
aber nicht
so oft vor.

Vorläufige
Anzeige, wie
man einfache
Buchstaben
durch zusam-
mengesetzte
Divisores
dividire;

warum man
die ganze
Auflösung
dieser Frage
hier noch
nicht geben
könne.

Von der Di-
vision der
Dignitäten
oder Poten-
zen.

und zwar
erstlich, wie
eine Digni-
tät über-
haupt durch

selbst hinzu sprechen können, ohne daß wir
nöthig hätten, das weitläufige a in aa
habe ich a mal, u. s. w. bezusetzen. Ue-
brigens kommen dergleichen Exempel nicht
so gar oft vor, wie wir schon gemeldet
haben. Eines wäre noch nöthig, daß
wir nemlich zeigten, wie ein einfacher
Buchstabe durch einen zusammengesetzten
Divisor, z. E. a durch $a + c$, oder b durch
 $a + d$ u. s. w. dividirt werde; allein weil
es einen Bruch dßfalls giebt, und wir
noch nicht gezeigt haben, wie man Brü-
che multiplicirt, so müssen wir die wichti-
ge und schöne Exempel von dieser Art in
das folgende Capitel versparen. Wir
nennen sie aber vorläufig schon nützliche
Exempel, weil sie uns den Weg zeigen;
wie man die ins unendliche fortgehende
Progressionen finden und hernach wieder
summiren könne.

§. 57. Endlich müssen wir auch noch
lernen, wie man die Dignitäten oder Po-
tenzen dividire. Wir haben bey der Mul-
tiplication von ihnen schon gehandelt,
und dürfen uns auf die daselbst gegebene
Erklärung der Potenzen berufen. Wenn
wir wissen, wie sie multiplicirt werden,
so läßt sich ihre Division bald lernen.
Eine Dignität ist z. E. a^4 , oder $aaaa$;
wenn ich diese durch a^3 oder aaa dividire,
so bekomme ich a . Dann wir wollen wirk-
lich nach der allgemeinen Regel dividiren:

$aaaa$

vier Rechnungsarten. 119

$$\begin{array}{r|l} aaaa & a \\ (aaa) & \\ \hline aaaa & \\ \hline 0 & \end{array}$$

eine andere
von einerley
Benennung
wirklich di-
vidirt werde.

Ich sage, aaa habe ich in $aaaa$ nach der Regel a mal; a mit aaa multiplicirt giebt $aaaa$; dieses von $aaaa$ subtrahirt geht auf. Eben so ist x^5 gleich $xxxxx$, wenn ich es nun durch x^2 oder xx dividire, so bekomme ich x^3 ; dann wenn man wirklich nach der Regel dividirt, so hat man

Auslösung
und Beweis;

$$\begin{array}{r|l} xxxxx & xxx \\ (xx) & \\ \hline xxxxx & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Hieraus läßt sich nun eine allgemeine und höchstbrauchbare Regel für die Division der Dignitäten erlernen, welche die folgende ist: Dignitäten von einerley Benennung werden durch einander dividirt, wenn man ihre Exponenten von einander subtrahirt. Demnach ist $y^8 : y^3 = y^{8-3} = y^5$; $x^7 : x^4 = x^{7-4} = x^3$ u. s. w. Man kann die Sache auch aus der Natur der Multiplication beweisen; dann weil $x^4 \cdot x^3 = x^4 + 3$ oder $x^7 =$ so muß $x^7 = x^4 + 3$ und $x^4 + 3 : x^4 = x^3$ seyn. Allein der obige Beweis, den wir zuerst gesetzt haben, fließt aus der genetischen Erklärung der Buchstabendivision überhaupt, und ist

Nutzbarkeit
der hieraus
gezogenen
Regel.

Anwendung!
der Regel
auf einige bes

sonders wich-
tige Fälle.

bahero schon vollkommen deutlich und all-
gemein. Wir wollen noch einige Exem-
pel geben, welche sich auf eben diese Re-
gel gründen, unerachtet sie nicht so klar
und augenscheinlich in die Sinne fallen.
Man solle a^m mit a^n dividiren. Hier ver-
fahre ich nach meiner Regel und sage
 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Wenn ich wüßte was m und
 n wäre, so könnte ich einem die Probe
gleich vor die Augen hin mahlen: denn
gesetzt m wäre 3 und n wäre 2; so hiesse
das Exempel: $a^{3-2} = a^1$; denn a^3 ist
 aaa und a^2 ist aa ; folglich $aaa \mid a$.

$$\begin{array}{r} (aa) \mid \\ aaa \end{array} \quad \text{Da}$$

aber doch die Probe in allen Fällen an-
gehet, ich mag für m und n setzen, was ich
für Zahlen will; so muß auch der allge-
meinste Ausdruck wahr seyn, daß nemlich

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}. \text{ Eben so ist } a^4 x^5 : a^2 x^3 =$$

$$\begin{array}{r} a^{4-2} x^{5-3} = a^2 x^2; \text{ weil } a^4 x^5 : a^2 x^3 = \\ \begin{array}{r} aaaaxxxxxx \mid aaxx \\ (aaxxx) \end{array} \\ \hline \end{array}$$

mal, wenn ich allgemeine Ausdrük-
ke brauche, nach der gegebenen Regel

$$\text{seyn } \frac{a^n x^m}{a^r x^s} = a^{n-r} x^{m-s}, \text{ und } \frac{x^r y^s}{x^m} = x^{r-m} y^s.$$

Aus

Aus gleichem Grunde, weil die Regel allgemein und bewiesen, wird auch $x^1 : x^1 = x^{1-1} = x^0$, ferner $x^2 : x^3 = x^{2-3} = x^{-1}$, so auch $\frac{x^2}{x^5} = x^{2-5} = x^{-3}$, u. s. w.

weil man nemlich den Exponenten des Divisors von dem Exponenten der zu dividirenden Zahl in diesem Fall nur subtrahirt, und wann man das grössere von dem kleinern subtrahirt, die Differenz negativ wird. Diese letztere Verwandlungen haben einen grossen und wahren Nutzen; man muß daher wohl darauf Achtung geben. Wir haben nun alle, wenigstens die vornehmsten Ausdrücke, namhaft gemacht, die in der Division der Potenzen vorkommen, und die man sich vorzüglich bekannt machen muß, wenn man in den algebraischen Rechnungen etwas thun will.

S. 58. Es ist noch eine Division der Eine zweite Potenzen zurück, welche zu wissen gleich Art die Potenzen zu dividiren, welche sonst die Ausziehung der Wurzeln heisst. Dann ich kann nicht nur eine Potenz durch eine andere gleichnamige überhaupt dividiren; sondern es kann auch geschehen, daß ich eine Potenz oder die Dignität durch diejenige Potenz wieder dividire, aus deren etlichmaliger Multiplication sie entstanden ist: z. E. a^2 entsteht, wenn ich a mit a , oder mit sich selbst multiplicire; a^4 entsteht, wenn ich die

Potenz a^2 mit sich selbst multiplicire; a^2 entsteht, wenn ich die Potenz a^2 dreymal mit sich selbst multiplicire: dann a^2 ist aaa ; folglich $aaa = aaaaaa$; und dieses Product, noch einmal mit aaa multiplicirt, giebt $aaaaaaaaaa$, oder a^9 . u. s. w. Nun verlangt man zu wissen, wie man es angreifen müsse, wenn man diejenige Potenz suchen wolle, aus deren etlichmaliger Multiplication eine solche höhere Potenz entstanden ist. Die Potenz muß einem gegeben seyn; das ist, man muß einem sagen, ob man aus a^9 diejenige Potenz verlange, die 9mal mit sich selbst multiplicirt die Potenz a^9 gebe, oder ob man diejenige verlange, die 3mal mit sich selbst multiplicirt a^9 werde; im ersten Fall ist sie a , im zweyten aber a^3 . Eine solche GröÙe, welche etlichmal mit sich selbst multiplicirt eine höhere Potenz hervorbringt, heißt man eine Wurzel, und druckt sie durch das Zeichen $\sqrt{}$ aus. Die Wurzel einer Potenz, welche entsteht, wenn man die WurzelgröÙe um zweymal mit sich selbst multiplicirt, heißt die Quadratwurzel, und wird blos durch $\sqrt{}$ angezeigt; wenn sie aber 3 mal mit sich selbst multiplicirt worden ist, so heißt sie die Cubicwurzel, und wird geschrieben $\sqrt[3]{}$; was weiter hinaus geht, heißt überhaupt die Wurzel 4, 5, 6, m , n , und wird geschrieben $\sqrt[n]{}$.

Auflösung
und
Beweis.

Was eine
Wurzel seye,
u. durch was
für Zeichen
die Wurzeln
ausgedruckt
werden.

$\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[6]{}$, $\sqrt[m]{}$, $\sqrt[n]{}$. u. s. w. Nun fragt sich, wie man eine solche gegebene Wurzel suchen müsse? Die höhere Potenzen in diesem Fall entstehen, wenn man die Exponenten mit einander multiplicirt; §. 50. folglich werden die Wurzeln wieder durch die umgekehrte Methode gefunden werden; das ist, wenn man den Exponenten der Dignität mit dem Exponenten der Wurzel dividirt. Ich suche $\sqrt[3]{}$ aus a^6 , oder die Potenz, die 3 mal mit sich selbst multiplicirt, a^6 giebt; setze daher $a^6 = aaaaaa$. Weil nun aa dreymal mit sich selbst multiplicirt $aaaaaa$ giebt; so ist $\sqrt[3]{a^6} = a^2$, das ist, $a^2 = a^{\frac{6}{3}}$; dann ich darf nur wirklich den Exponenten der Dignität 6, durch den Exponenten der Wurzel 3 dividiren, so habe ich a^2 . Ferner ist $\sqrt[2]{a^8} = a^4$; dann $a^{4 \cdot 2} = a^8$. Folglich wird $\sqrt[2]{a^8} = a^{\frac{8}{2}}$; hingegen $\sqrt[4]{a^8} = a^2 = a^{\frac{8}{4}}$. Eben so ist $\sqrt{x^6} = x^{\frac{6}{2}} = x^3$; dann $x^{3 \cdot 2} = x^6$ §. 50. folglich wird die Quadratwurzel daraus seyn $x^{\frac{6}{2}} = x^{\frac{3 \cdot 2}{2}} = x^3$. Die ganze Kunst besteht also darinnen, daß man den Exponenten der Dignität durch den Exponenten der gegebenen Wurzel dividirt. Diese Regel muß man sich wohl bekannt machen: dann sie ist eine von denenjenigen, die unter allen bisherigen

Allgemeine Regeln, die Wurzeln in Zeichen auszudeuten.
Erklärung dieser höchst brauchbaren Regel.

rigen Regeln in den algebraischen Rechnungen fast am häufigsten vorkommen, und den größten Nutzen haben. Man muß sich aber auch in andere Exempel finden können, die einem nicht mehr so klar, wie die gegebene, vor die Augen hingemahlt, sondern durch Hülfe der allgemeinen Regel dem Verstand deutlich gemacht werden, wenn gleich die Einbildungskraft nicht mehr so geschäftig dabei seyn darf. Ich solle zum Exempel die Cubicwurzel aus x^5 einem sagen, so schreibe ich kraft meiner Regel $\sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$; hier ist der neue Exponent ein Bruch, den man nicht durch die nebeneinander gesetzte Buchstaben faßlich genug für die Einbildungskraft vorstellen kann: aber der Verstand, der die gegebene Regel begreift, wird dennoch nichts dagegen einwenden können. Eben so ist $\sqrt[3]{x^1}$, oder aus x in der ersten Potenz, $= x^{\frac{1}{3}}$, ferner die Quadratwurzel aus x^3 ist $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$. Eine gleiche Beschaffenheit hat es mit allgemeinen Ausdrücken; dann $\sqrt[m]{x^{nm}}$ oder $\sqrt[m]{x^{nm}}$ ist gleich $x^{\frac{nm}{m}} = x^n$; und $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ und $\sqrt[m]{x^{n+1}}$ ist gleich $x^{\frac{n+1}{m}}$; Wie man übrigens die Brüche der Exponenten

Anwendung
auf einige
schwerere
Fälle, welche
aber sehr oft
vorkommen.

ten hier und da vermindern, kleiner machen und schicklicher ausdrücken solle, werden wir im folgenden Capitel zeigen. Den Nutzen von unserer Regel werden diejenigen erst recht erfahren, welche weis- Die Brauch-
 ter kommen; ich kann daher nicht um- barkeit dieser
 hin, meine Leser noch einmal zu erinnern, Regel wird
 in der Kenntniß dieser Ausdrücke sich recht- noch einmal
 fest zu setzen; Leibniz und Newton haben angepriesen.
 sie zuerst gemeinnütziger gemacht, und
 sodann die größte Erfindungen dadurch er-
 leichtert. Was die Regel selbst betrifft,
 so ist sie faßlich und deutlich genug. Nur
 muß man dasjenige nicht vergessen, was
 ich von den Kräften des Verstandes und Einige allge-
 der Phantasie gesagt habe. Man siehet meine An-
 zugleich, daß auch in andern Wissenschaf- merkungen,
 ten diese Anmerkung brauchbar seye. Es wie der Ver-
 können manchmal Fälle vorkommen, stand durch
 die einem nicht so klar in die Augen fal- die Mathes-
 len; daher kommen Einwürfe, Logoma- matik auch
 chien, nichts heissende Consequentien. u. in andern
 s. w. Sie entstehen aus dem Mißbrauch Wissenschaft-
 der Einbildungskraft, und aus dem Man- ten geschä-
 gel der Erkenntniß allgemeiner Regeln. set werde.
 Denn wenn ich einmal die Allgemeinheit
 einer Regel bewiesen habe, so müssen auch
 alle Fälle, die darunter begriffen sind,
 nach selbiger sich richten. So ist der Satz
 des zureichenden Grundes in der Mecha-
 nik schon vom Archimedes für einen all-
 gemeinen Satz erkannt worden. Aber in
 ans

andern Fällen, die nicht so mechanisch vorgestellt werden können, hat man je und je seine Allgemeinheit in Zweifel gezogen. Wir wollen aber von dem Nutzen dieser Anmerkungen noch einige Beispiele zum Beschluß geben.

§. 59. Wir haben gezeigt, daß eine Grösse, durch sich selbst dividirt, 1 wird; der Satz ist leicht, und wird von jedermann begriffen. $\frac{6}{6}$ oder 6 dividirt durch 6 ist eins; also auch a dividirt durch a ist 1, oder $\frac{x}{x} = 1$. Nun können wir aus dies-

Vorläufige Anzeige von der Progression der Potenzen, welche durch die Division immer abnehmen.

sem leichten Satz eine höchst fruchtbare Progression der Potenzen schon vorläufig verstehen und herleiten, z. E. x^4 dividirt durch x giebt x^3 , x^3 dividirt durch x giebt x^2 , x^2 dividirt durch x giebt x^1 , x^1 dividirt durch x^1 giebt 1, 1 dividirt durch x giebt $\frac{1}{x}$, und dieses dividirt durch x giebt $\frac{1}{x^2}$ u. s. w. d. i.

$$\frac{x^4}{x} = x^3$$

$$\frac{x^3}{x} = x^2$$

$$\frac{x^2}{x} = x^1$$

$$\frac{x}{x} = 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} : x = \frac{1}{x^2} \text{ u. s. w.}$$

Nun

Nun wollen wir $\frac{x}{x} = 1$, nennen x in der und wie man

Potenz Nulle; oder x^0 ; und die unter einem neuen
 $x^0 = 1$ stehende und abnehmende Potens höchst

zen ohne Brüche auszudrücken suchen. brauchbaren
 Wenn $1 = x^0$, so kann $\frac{1}{x}$ weder x^1 noch x^0 Ausdruck für

seyn; sondern es muß kleiner werden, wie die dividirte
 z. E. $\frac{1}{6}$ kleiner ist als 6 und als 1; wenn Potenzen er-

ich nun den Bruch vermeiden will, so weiß ich kein taugliches Zeichen, als wenn ich funden habe.
 sage: der Bruch $\frac{1}{x}$ ist x , aber in der Digni-

tät — 1, und der Bruch $\frac{1}{x^2}$ ist auch x aber

in der Dignität — 2 u. s. w. Daß aber

dieser Ausdruck aus den innern Gründen

der Grössenlehre nothwendig folge, sie-

het man vorläufig schon aus der S. 57.

vorgetragenen und erwiesenen Methode,

die Potenzen zu dividiren. Denn wenn

ich x^1 durch x^2 dividire, so habe ich nach

den angeführten Grundsätzen $x^{1-2} = x^{-1}$,

folglich ist $\frac{1}{x}$ nach den wesentlichen Regeln

der Buchstaben Division dem Ausdruck

x^{-1} vollkommen gleich. Demnach giebt

es diese zwei gleiche Progressionen

$\{ x^3, x^2, x^1, x^0, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-n}$

$x^3, x^2, x^1, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^n}$

Auch diese Ausdrücke haben einen grossen

Nutzen; indeme man z. E. für einen

Bruch $\frac{1}{x^m}$ nur setzen darf x^{-m} , für $\frac{1}{a^4}$ nur

a^{-4} .

a^4 , für $\frac{1}{ax^3}$ nur $a^1 x^3$ u. s. w. Wir wer-

den aber im folgenden Capitel davon handeln, auch zu seiner Zeit, wenn wir die Lehre von den Logarithmen vortragen, ihre Aehnlichkeit mit diesen Ausdrücken umständlich zeigen.

Uebung des
Wises in
schneller Er-
findung der
Factorum
und Diviso-
rum einer
Größe;

§. 60. Nunmehr haben wir alles gesagt, was bey der Division zu sagen war. Eines fügen wir noch bey. Man kann eine nicht gemeine Fertigkeit des Wises und der Scharfsinnigkeit zeigen, wenn man durch fleißiges Nachdenken und eine gute Uebung sich in den Stand setzet, die Factores eines Ausdrucks schnell zu finden, und hernach den Ausdruck selbst, wenn er nicht schicklich genug zur Rechnung wäre, damit zu verwechseln. So ist z. E. $ax - x = (a - 1)x$: denn wenn ich $a - 1$ mit x multiplicire, so bekomme ich $ax - x$; und wenn ich diesen Ausdruck mit $a - 1$ dividire, so bekomme ich x . Auf gleiche Weise ist $xy - y = (x - 1)y$, und $abx - bx = bx(a - 1)$; ferner $ax + x = (a + 1)x$, u. s. w. Diese Ausdrücke, welche einander gleich sind, kommen oft vor, und können mit Nutzen gebraucht werden. Eben so ist auch $aa - bb = (a - b)(a + b)$, $xx - yy = (x - y)(x + y)$ u. s. w. Man kann keine besondere Regeln davon geben, weil die Fälle so mannigfaltig sind, und man also durch die Men-

Einige am
meisten vorkommende
Exempel
werden an-
geführt,

ge der Regel nur überhäuft würde. So und gezeigt, viel siehet man schon, daß eine fleißige wie man zu Uebung das meiste thun müsse; indem die einer Fertigkeit in dieser Divisores bald gefunden werden, wenn man weiß, durch was für Factores die Erfindung zu dividirende Zahl in der Multiplication entstanden ist. Diß aber lernt man, gelangen wenn man allerhand Exempel mit einander könne? der multiplicirt, und auf die Producte sowohl als auf die Factores Achtung giebt. Die am häufigsten vorkommende Exempel haben wir selbst angeführet: daher wir auch in diesem Stücke unsern Lesern nicht allzuvielle Mühe zu machen gesonnen waren.

Drittes Capitel.

Von den einfachen Verhältnissen der Zahlen, und besonders von den Brüchen.

§. 61.

Eine einfache Verhältniß der Größen bekommt man, wenn man zwei Zahlen mit einander vergleicht, und entweder auf ihre Differenz oder auf ihren Quotienten siehet. So können 2 und 6 mit einander verglichen werden. Dann ich kann sagen: 6 ist um 4 größer als 2, oder welches gleichgültig ist, 6 weniger 2 ist

Was eine einfache Verhältniß seye.

Ihre Ein-
theilung in
die arithme-
tische und
geometrische
Verhältniß.

Warum alle
nur mögliche
Zahlen diese
doppelte
Verhältniß
haben könn-
en?

2 ist 4, oder auch 4 ist die Differenz zwi-
schen 2 und 6; alle diese Ausdrücke sind
von einerley Bedeutung §. 28. Hernach
kann ich auch sagen, 6 ist 3 mal grösser als
2, oder 2 in 6 ist 3 mal enthalten, oder
wenn man sechs durch 2 dividirt, so ist
der Quotient 3, oder auch 2 kann ich
durch die schnelle Subtraction von 6, 3 mal
subtrahiren. Auch diese Ausdrücke gelten
allesamt gleichviel. §. 51. Wenn ich nun bey
zwo Zahlen auf die Differenz sehe, so ha-
be ich eine arithmetische Verhältniß;
sehe ich aber auf ihren Quotienten, so
bekomme ich eine geometrische Verhält-
niß. Diese Namen muß man sich wohl
bekannt machen. Sie sind nicht nur von
grossem Nutzen, wie wir zeigen werden,
sondern auch allgemein. Dann ich mag
zwo Zahlen denken, was ich nur für will,
so werden sie allemal eine arithmetische
und geometrische Verhältniß haben könn-
en. Der Grund davon ist leicht zu be-
greiffen. Alle nur mögliche Zahlen lassen
sich von einander subtrahiren, und wenn
sie auch vollkommen gleich wären: dann
in diesem Fall ist ihre Differenz null, z.
E. $3 - 3 = 0$; sind sie aber ungleich, so
ist es vorhin klar, daß sie eine wirkliche
Differenz haben. Da nun alle nur mög-
liche Zahlen eine Differenz von einander
bekommen können, so läßt sich auch bey
allen Zahlen eine arithmetische Verhält-
niß

nist gedenken. Das ist das erste. Das zweite, daß alle nur denkbare Zahlen eine geometrische Verhältniß haben können, beweisen wir auf gleiche Art. Alle nur mögliche Zahlen lassen sich durch einander dividiren, der Quotient mag hernach ein Bruch, oder eine ganze Zahl, oder wenn man eine Zahl durch sich selbst dividirt, nur Eins seyn. S. 54. Folglich mag ich zwei Zahlen denken, was ich für will, so werde ich auch ihren Quotienten hinzudenken können. Wenn sie aber einen Quotienten haben, so können sie alle in einer geometrischen Verhältniß stehen. Das war nun das andere, das wir beweisen wollten. Eine arithmetische Verhältniß wird durch das Subtractionszeichen, eine geometrische aber durch das Zeichen der Division ausgedruckt; $a - b$ ist also eine arithmetische, hingegen $\frac{a}{b}$ oder $a : b$ eine geometrische Verhältniß; oder $6 - 2$ ist durch eine arithmetische, und $\frac{6}{2}$ oder $6 : 2$ durch eine geometrische Verhältniß ausgedruckt. Die Gleichheit zweyer Verhältnisse heißt eine Proportion, davon wir im folgenden Capitel reden werden.

S. 62. Die arithmetische Verhältnisse, welche man inzwischen dem Namen nach behalten muß, bis wir im folgenden Capitel ihre Eigenschaften erweisen, haben keinen besondern üblichen Namen

Geometrische Verhältnisse werden in der gemeinen Arithmetik Brüche genannt.

Was ächte und unächte Brüche seyen.

Was Zehler und Nenner heißen.

Wie man von der GröÙe eines Bruchs urtheilen solle.

bey den gemeinen Rechenmeistern bekommen. Hingegen hat man die geometrische Verhältnisse, welche weit öfter vorkommen, in der gemeinen Rechenkunst anders und zwar Brüche genannt. Ein Bruch (fractio) ist also in der Arithmetik nichts anders, als eine geometrische Verhältniß oder eine Zahl, die durch eine andere dividirt wird. Wenn die Zahl, welche dividirt wird, kleiner ist als der Divisor, so heißt der Bruch ein ächter Bruch; ist sie aber dem Divisor gleich oder gar grösser als der Divisor, so heißt sie ein unächter Bruch. Z. E. $\frac{6}{12}$ ist ein ächter Bruch; hingegen $\frac{6}{8}$ oder $\frac{8}{3}$ sind unächte Brüche. Die zu dividirende Zahl sowohl als der Divisor haben in der Lehre von den Brüchen andere und ganz neue Namen bekommen. Denn die zu dividirende Zahl heißt der Zehler, und der Divisor der Nenner. Also was in der Divisionslehre der Divisor ist, das ist in der Bruchlehre der Nenner. So ist z. E. in dem Bruche $\frac{3}{6}$, 3 der Zehler, (numerator), und 6 der Nenner, (denominator). Den Grund dieser Namen wollen wir zeigen, wenn wir die Art und Weise Brüche zu addiren und zu subtrahiren vortragen.

§. 63. Ehe wir aber diese Lehre abhandeln, müssen wir vorher zeigen, welche Brüche grösser oder kleiner als andere seyen, und welche einander gleich seyen.

Es

Es ist etwas schwer, von der Größe der Brüche zu urtheilen; die Regel heißt zwar so: je kleiner der Quotient ist, desto größer ist der Bruch, und je größer der Quotient ist, desto kleiner ist der Bruch. Allein diese Regel ist für Anfänger nicht faßlich und deutlich genug, wenn man sie nicht auf eine ganz leichte Art zu beweisen sucht. Wir wollen einen Versuch davon machen. Man theile eine Linie AB in 8 allgemeine gleiche Theile:

Regel samt

A 1 2 3 4 5 6 7 8 B dem Beweis.

$$\begin{aligned} \text{so wird } A8 &= \frac{8}{8} \\ A7 &= \frac{7}{8} \\ A6 &= \frac{6}{8} \\ A5 &= \frac{5}{8} \\ A4 &= \frac{4}{8} \\ A3 &= \frac{3}{8} \\ A2 &= \frac{2}{8} \\ A1 &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Nun siehet man augenscheinlich, daß

$$A8 > A7 > A6 > A5 > A4 \text{ u. s. w.}$$

folglich auch

$$\frac{8}{8} > \frac{7}{8} > \frac{6}{8} > \frac{5}{8} > \frac{4}{8} > \frac{3}{8} \text{ u. s. w.}$$

Dahero sich eine leichte Regel herausziehen läßt, welche also heißt: je öfter der Zehler im Nenner enthalten ist, desto kleiner ist der Bruch, wenn man ihn mit

Anwendung
der Regel,
wenn die
Nenner ei-
nerley sind.

einem andern vergleicht, dessen Zehler im Nenner nicht so oft enthalten ist. Die Linie von A bis 2 ist 2 Achttheile der ganzen Linie AB, oder $\frac{2}{8}$; diese Linie ist nun viel kleiner als die von A bis 6, welche 6 Achttheile der Linie AB in sich begreift, oder $\frac{6}{8}$ heißt; folglich muß auch der Bruch $\frac{2}{8}$ weit kleiner seyn als $\frac{6}{8}$; da nun 2 in 8 4 mal, 6 in 8 aber nur einmal und etwas wenigens darüber enthalten ist, so siehet man den Grund der angeführten Regel, von der Grösse der Brüche zu urtheilen. Die Sache ist also leicht, wenn die Nenner gleich sind. So ist z. E.

$$\frac{3}{7} < \frac{5}{7}, \frac{4}{9} < \frac{8}{9}, \frac{3}{25} < \frac{10}{25} \text{ u. s. w.}$$

wie man von
der Grösse
urtheilen sol-
le, wenn die
Nenner ver-
schieden sind.

Wenn aber die Nenner auch unterschieden sind, so muß man die Brüche vorher unter einerley Benennung bringen, wenn man ein zuverlässiges Urtheil fällen will; oder darf man nur im Kopf geschwinde dividiren, und sehen wie oft der eine Zehler in seinem Nenner, und hernach auch wie oft der andere Zehler in dem seinigen enthalten seye; in welchem Falle man nach der gegebenen Regel abermal ein sicheres Urtheil von der Grösse der Brüche geben kann. Z. E. $\frac{3}{8}$ und $\frac{1}{6}$ sollen nach ihrer Grösse beurtheilet werden; 3 in 28 ist 9 mal und noch etwas drüber enthalten, 1 in 6 aber nur 6 mal; also ist $\frac{1}{6}$ grösser als $\frac{3}{8}$; eben so ist $\frac{2}{3}$ grösser als $\frac{18}{25}$, $\frac{1}{3}$ grösser

fer als $\frac{5}{3}$ u. s. w. Man darf in diesen Fällen nicht jedesmal dividiren, sondern nur überhaupt durch das Anschauen der Zahlen gleichsam zu errathen suchen, welcher Zehler mehrmalen in seinem Nenner enthalten seye, wenn man nicht genau zu wissen verlangt, um wie viel ein Bruch grösser als der andere sey. Will man aber dieses wissen, so ist es am sichersten, wenn man die Brüche unter einerley Benennung bringt; wie wir an seinem Ort zeigen werden.

§. 64. Eben hieraus läßt sich auch leicht bestimmen, welche Brüche einander gleich seyen. Ein Bruch ist dem andern gleich, wenn des einen Zehler in seinem Nenner so oft enthalten ist, als der Zehler des andern in seinem Nenner enthalten ist. So ist z. E.

$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} = \frac{6}{24}$ u. s. w. Denn eins ist in viere so oft enthalten als 2 in 8, und 4 in 16, und 5 in 20, und 6 in 24 u. s. w. Dann der Quotient, oder wie er auch sonst in der Bruchlehre heißt, der Exponens rationis, ist allemal 4. Man siche den Gebrauch dieser Regel leicht ein, wenn nach geschעהener Division des Nenners durch den Zehler alles aufgeht und kein Rest übrig bleibt; wenn aber etwas übrig bleiben sollte, so ist es besser, wenn man die beede Brüche unter einerley Benennung bringt, und sodann ihre Gleichheit

deutlich einsehen lernt. Z. E. $\frac{3}{7}$ und $\frac{6}{14}$ sind einander vollkommen gleich. Den Grund davon werden wir sogleich vortragen, und wie man Brüche unter einerley Benennung bringe, umständlich zeigen.

Allgemeines
Fundamen-
talgesetz der
geometrischen
Verhältnis-
se und Pro-
portionen,
wird vorge-
tragen und
ausführlich
bewiesen.

§. 65. Wenn ich einen Bruch, das ist seinen Zehler und Nenner, durch eine dritte Zahl multiplicire oder dividire; so wird er nicht verändert, sondern so groß als vorhin, das ist, sich selber vollkommen gleich bleiben. Dieses ist das Fundamentalgesetz bey den Brüchen, welches wir jezo, wegen seines grossen Nutzens, ausführlich beweisen wollen. Hier kommt uns nun ein leichter und gemeiner Satz, den wir schon angeführt haben, sehr wohl zu statten: nemlich der jedermann bekannte Satz: Eins multiplicirt und dividirt nicht §. 39. 54. Nun ist eine Grösse durch sich selbst dividirt, allemal eins; §. 54. folglich wird auch eine solche Grösse eine andere weder multipliciren noch dividiren, das ist, durch die Multiplication und Division weder grösser noch kleiner machen. Nun solle uns der Bruch $\frac{a}{b}$ gegeben seyn, ein Bruch, welcher allen nur denkbaren Brüchen gleich seyn kann. Dann a kann alle mögliche Zahlzeichen, oder alle mögliche Zehler, und b alle nur mögliche Nenner bedeuten:

ten: für a kann ich ja 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 30, u. s. w. und für b gleichfalls 1, 2, 3, 4, 5, u. s. w. setzen. Folglich ist der Bruch $\frac{a}{b}$ ein allgemeiner Ausdruck für alle Brüche, und was ich von dem Bruch $\frac{a}{b}$ beweise, das habe ich von allen nur denkbaren Brüchen bewiesen. Ein Bruch ist allemal eine gewisse Grösse, darum wird $\frac{a}{b}$ auch eine Grösse seyn: folglich wird er mit 1 dividirt oder multiplicirt weder grösser noch kleiner werden. Nun ist $\frac{m}{m}$ gleich eins, S. 54. und zwar so gut als $\frac{6}{6}$ gleich ist eins. Wenn ich also den Bruch $\frac{a}{b}$ mit $\frac{m}{m}$ multiplicire, so wird er noch ganz der vorige Bruch seyn, und nicht im mindesten verändert werden. Nun aber habe ich noch nicht gezeigt, wie man Brüche mit Brüchen multiplicirt; daher weiß ich auch nicht, wie der Bruch $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{m}$ nach geschehener Multiplication aussehen muß. Denn wenn ich sage: man muß Zehler mit Zehler, und Nenner mit Nennern multipliciren; so könnte ich einen Cirkel begehen, wenn ich hernach weiter unten die Multiplicationsregeln der Brüche aus dem gegenwärtigen noch nicht erwiesenen Fundamentals

gesetz erweisen wollte. Durch die bloße Anzeige aber $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{m} = \frac{a}{b}$ habe ich noch nichts gewonnen, weil ich dadurch noch nicht in den Stand gesetzt bin, den neuen Bruch recht zu schreiben und auszusprechen. Allein es ist schon viel gewonnen, wenn man nur diese bloße Anzeige recht versteht, und weiß daß $\frac{a}{b}$ multiplicirt mit $\frac{m}{m}$ vollkommen dem vorigen und noch nicht multiplicirten Bruch $\frac{a}{b}$ gleich seyn. Und das haben wir bisher erwiesen. Nun wollen wir unabhängig von den Regeln der Multiplication zeigen, wie der multiplicirte Bruch aussehen müsse, und uns bloß auf die in der Einleitung vorgetragene Grundsätze berufen. Der Quotient oder die Grösse des Bruchs $\frac{a}{b}$ solle n seyn, oder $\frac{a}{b}$ solle n gleich seyn. Wenn ich nun einen neuen Bruch durch das Calculiren herausbringe, dessen Grösse auch n ist; so wird dieser neue Bruch derjenige seyn, den ich gern schreiben und aussprechen möchte: denn wenn er ein anderer Bruch wäre; so würde seine Grösse der Grösse des vorigen gewis nicht vollkommen gleich seyn. Ich muß aber den andern Bruch $\frac{m}{m} = 1$ in meine Rechnung mit hineinbringen,

gen,

gen, doch so, daß ich keine Rechnungsart und Operation dabei brauche, die ich aus dem bisherigen nicht schon wüßte und verstünde. Ich setze also:

$$\frac{a}{b} = n$$

folglich ist, wenn man beiderseits mit b multiplicirt, nach §. 9. 55.

$$a = bn$$

$$m = m$$

Und wenn man nochmalen beiderseits mit m multiplicirt

$$am = bnm \quad \text{§. 9.}$$

$$\text{---} : bm$$

Endlich wenn man beiderseits mit bm dividirt; so ist

$$\frac{am}{bm} = n$$

Da nun Anfangs gleich gesetzt wurde

$$\frac{a}{b} = n$$

so ist nach dem Grundsatz: wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie einander selber gleich. §. 9.

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$$

Folglich siehet der neue Bruch so aus, wie $\frac{am}{bm}$, weil er dem vorigen $\frac{a}{b}$ vollkommen gleich ist.

Wir haben in diesem Beweis nichts angenommen, das nicht in der Einleitung und den Regeln der Division in ganzen Zahlen schon wäre erwiesen worden, zugleich aber auch ihn so deutlich gemacht, daß wir zu unsern

Lesern das gute Zutrauen haben, sie werden ihn verstehen. Eben so beweisen wir jezo auch umgekehrt, daß ein Bruch durch eine dritte Zahl dividirt sich selbst gleich bleibe. Diesen Beweis, weil er dem vorigen ganz ähnlich ist, wollen wir kürzer machen. Der zu dividirende Bruch seye $\frac{am}{bm}$, der Divisor seye m . Nun setze ich abermal die Grösse des Bruches

$$\frac{am}{bm} = n,$$

$$am = bmn,$$

$$\frac{m}{a} = \frac{m}{bn},$$

$$a = bn,$$

$$\text{—————} : b$$

$$\frac{a}{b} = n$$

$$\frac{am}{bm} = n$$

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b},$$

so wird §. 9. 55.

und weil

so wird, wenn man beiderseits damit dividirt,

und wenn man nochmalen beiderseits mit b dividirt,

Da nun auch

so wird

und folglich der durch m dividirte Bruch $\frac{am}{bm}$

nach der Division aussehen wie $\frac{a}{b}$. Das

ist das Hauptgesetz, nach welchem sich alle Brüche, Proportionen und Progressionen richten, nemlich daß $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$ oder

$$a : b = ma : mb.$$

§. 66. Hieraus siehet man nun in Rücksicht auf die Brüche, daß der Bruch unverändert bleibe, wenn man seinen Zehler und Nenner durch eine dritte Zahl multiplicire oder dividire. Z. E. der Bruch $\frac{6}{18}$ ist dem Bruch $\frac{6}{18} : \frac{3}{3}$ das ist $\frac{2}{6}$ gleich, und dieser Bruch ist eben so groß als $\frac{2}{6} : \frac{2}{2}$ oder $\frac{1}{3}$. Und das heißt man nun, aber auf eine sehr ungeschickte Weise, einen Bruch kleiner machen. Dann der Bruch wird nicht kleiner, sondern bleibt so groß, als er vorher war, er wird nur anders und kürzer ausgedruckt; oder der Zehler und Nenner werden kleiner, nicht aber die Verhältniß oder der Bruch selbst. Wir wollen daher lieber sagen, man bringe durch diese Division einen Bruch unter eine kürzere Benennung. Wenn nun Brüche in Zahlzeichen vorkommen, so hat man keine allgemeine Regel, Brüche kürzer auszudrücken, als daß man einem sagt, er solle es mit den schicklichsten Zahlen versuchen, ob der Zehler und Nenner so dividirt werden können, daß nichts übrig bleibt. Z. E. $\frac{24}{128}$ läßt sich durch 4 aufheben; (das ist der Name, den man dieser Operation mit den Brüchen zu geben pflegt;) dann 4 in 24 habe ich 6 mal, und 4 in 128 habe ich 32 mal: folglich heißt der neue Bruch $\frac{6}{32}$ und dieser läßt sich durch 2 noch kürzer machen, da er dann $\frac{3}{16}$ heißt, und noch eben so groß

Wie man einen Bruch kleiner machen oder kürzer ausdrücken könne.

groß ist als $\frac{24}{128}$; Weil nun $2 \cdot 4 = 8$, so läßt sich der groſſe Bruch auch mit 8 auf einmal aufheben: dann 8 in 24, iſt 3 mal, und in 128, 16 mal enthalten. Der Bruch $\frac{3}{16}$ kann nicht kürzer werden: dann 3 läßt ſich nur mit 3 dividiren; 16 aber geht durch die Division mit 3 nicht auf, ſondern läßt eins übrig. Folglich iſt $\frac{3}{16}$ der kleinſte Ausdruck des Bruchs $\frac{24}{128}$. Es iſt in allewege nöthig, daß man die Brüche unter kürzere Benennung bringe, indem dieſe Reduction in allen Rechnungen, vornehmlich in ſolchen, die man im gemeinen Leben braucht, keinen geringen Nutzen hat: inzwiſchen halte ich doch dafür, daß man dem ungeachtet niemand mit vielen Regeln bey dergleichen Fällen, wo die Uebung das beſte thut, überhäuffen ſolle. Damit wir aber unſere Leſer noch beſſer überzeugen; ſo wollen wir eine Regel, welche in dieſer Art die leiſteſte und vollkommenſte heißen kann, herſetzen. Es kommt darauf an, daß man wiſſe, durch was für Zahlen zwei andere Zahlen ſich ſo dividiren laſſen, daß nach geſchehener Division nichts übrig bleibe. Nun wollen wir die Stellen der Zahlzeichen nach der Ordnung der Buchſtaben a, b, c, d, und ſo weiter nennen. Die letzte Claſſe, nemlich die Claſſe der Einheiten, ſolle a heißen, oder a ſolle die Einheiten, b die Zehner, c die Hun-

Was von den
Regeln zu
halten, wel-
che anzeigen,
durch was
für Zahlen
eine andere
gegebene
Zahl ſich völ-
lig dividiren
laſſe.

Hunderter, d die Tausender, e die Zehentausender, f die Hunderttausender, g die Tausendmaltausender oder Millionen und so weiter anzeigen. Folglich werden alle mögliche ganze Zahlen durch die allgemeine Formel $a + 10b + 100c + 1000d + 10000e + 100000f + 1000000g$ u. s. w. ausgedruckt werden. Nun dividire man diese Zahlen durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 u. s. w. und merke was nach geschehener Division übrig bleibt. Läßt sich der Rest durch den Divisor noch so dividiren, daß nichts übrig bleibt, so läßt sich die ganze Zahl durch eben diesen Divisor dividiren. Bleibt aber etwas übrig, so kann man nicht dividiren. Man dividire also zuerst durch 2, so ist der Quotient $\frac{a}{2} + \frac{1}{2}b + \frac{100}{2}c + \frac{1000}{2}d$ u. s. w. Folglich bleibt allein a übrig, dann 10 a lassen sich durch 2 vollkommen dividiren; so auch 100 c, und 1000 d u. s. w. Eben so macht man es mit den übrigen Divisoren; z. E. wenn ich mit 3 dividire, so bleibt $a + b + c + d + e + f$ u. s. w. das ist, die Summe aller Zahlzeichen außer ihrem Rang betrachtet, übrig. Dann $\frac{a}{3} + \frac{10}{3}b + \frac{100}{3}c + \frac{1000}{3}d$ u. s. w. $= \frac{a}{3} + 3b + \frac{b}{3} + 33c + \frac{c}{3} + 333d + \frac{d}{3}$ u. s. w. Folglich ist dasjenige, was in der Division nicht aufgethet, und also übrig bleibt, $a + b + c + d$ u. s. w. Aus dieser Rechnung wird nun fol-

Eine allgemeine Regel, wie man alle Divisores einer Zahl finden könne, wird angeführt und erwiesen

folgende Tabelle erwachsen, in welcher die Divisores in der gewöhnlichen Ordnung der Zahlen fortgehen:

Divi.
fores.

Residua oder Reste.

$$2 \quad a$$

$$3 \quad a + b + c + d + e + f + g \text{ u. s. w.}$$

$$4 \quad a + 2b$$

$$5 \quad a$$

$$6 \quad a + 4b + 4c + 4d + 4e \text{ u. s. w.}$$

$$7 \quad a + 3b + 2c + 6d + 4e + 5f + g + 3$$

$$8 \quad a + 2b + 4c \quad \text{h u. s. w.}$$

$$9 \quad a + b + c + d + e \text{ u. s. w.}$$

$$10 \quad a$$

$$11 \quad a + 10b + c + 10d + e + 10f \text{ u. s. w.}$$

das ist

$$a - b + c - d + e - f + g - h \text{ u. s. w.}$$

Hieraus lassen sich nun leicht allerhand Regeln begreifen. Dann daran wird niemand zweifeln, daß, wenn ich den Rest selbst noch durch die gegebene Zahl ohne weitem Rest dividiren kann, die ganze Zahl selbst, ohne einen Rest zu lassen, dividirt werden könne. Wenn ich 384 mit 2 dividire, so ist nach unserm allgemeinen Ausdruck diese Zahl $= 100.3 + 10.8 + 4$. Nun läßt sich $100.3 + 10.8$ vollkommen dividiren; wenn sich nun der Rest 4, welcher durch das a in der Tabell angezeigt wird, auch vollends durch 2 dividiren läßt, so läßt sich die ganze Zahl durch

Welche Zahlen
sich durch
4, 5, und so

durch zwey gerade dividiren. Folglich ^{völlig dividiren lassen,} wird die erste Regel diese seyn: I. Wenn sich das letzte Zahlzeichen einer gegebenen Zahl durch 2 oder 5 oder 10 dividiren läßt, so läßt sich die ganze Zahl dadurch dividiren.

II. Wenn sich die Summe aller ^{welche durch 3 und 9 sich dividiren lassen,} Zahlzeichen durch drey oder neune dividiren läßt, so läßt sich die ganze Zahl dadurch dividiren.

III. Wenn das letzte Zahlzeichen zu dem mit 2 multiplicirten ohnehins letzten addirt wird, und die Summe durch 4 dividirt gerade aufgeht; ^{welche durch 4 dividirt aufgehen,} so läßt sich die ganze Zahl durch 4 dividiren.

IV. Wenn das letzte Zahlzeichen zur ^{welche durch 6 sechse,} Summe aller vorhergehenden mit 4 multiplicirten Zahlzeichen addirt, sich durch 6 dividiren läßt; so läßt sich die ganze Zahl durch 6 dividiren.

V. Wenn ich eine Zahl mit 7 dividiren will, ^{und durch sieben u. s. w. dividirt werden können.} so wird die Regel gar zu weitläufftig: daher es am besten ist, wenn man die Formul in der Tabell ansiehet, und nach derselben den vorkommenden Rest dividirt; geht er auf, so läßt sich die ganze Zahl dividiren. Uebrigens erhellet zugleich, daß die Division durch 7 die schwerste und unbequemlichste seyn. Weitere Regeln wollen wir nicht geben; der Leser kann sie selbst aus der Tabelle herausziehen. Eines merken wir bey der

warum die
Residua
 $a + 10b$ u. s.
w. gleich
seyn $a - b$
 $+ c$ u. s. w.

Nutzen und
Gebrauch
dieser An-
merkung.

Division durch 11 noch an. Wir haben
gesetzt $a + 10b + c + 10d$ u. s. w. sene gleich
 $a - b + c - d$ u. s. w. Der Beweis das
von gründet sich auf die mit den Subs-
tractionregeln verglichene Regeln der
Division in Buchstaben. Denn wenn
ich z. E. 8 durch 9 dividire, so ist der Quo-
tient zwar $\frac{8}{9}$; er kann aber auch $1 - \frac{1}{9}$
seyn; denn man dividire wirklich, und
bilde sich ein, der Divisor sey der zu divi-
direnden Zahl gleich, so hat man $\frac{8}{9} \overline{) 1}$;

Die Probe wird die Operation klar ma-
chen: dann 1. 9 mit dem negativen Rest
 -1 ist der zu dividirenden Zahl 8 wieder

gleich. Eben so ist $10b \overline{) b}$, dann 11 b
II.

$-b$ ist wiederum gerade $10b$; folglich
werden, wenn man alles durch 11 noch-
malen dividiret, die Residua in der Ta-
belle seyn $a - b + c - d + e - f$ u. s. w.

Beurtheilung
der gegebenen
Regeln.

Nun stellen wir es unsern Lesern fren, ob
sie diese Regeln sich bekannt machen, oder
lieber aus der Uebung und durch oftmali-
ge Versuche es lernen wollen, wie ein ge-
gebener Bruch durch eine schnelle Divi-
sion unter eine kleinere Benennung ge-
bracht werden müsse. Die zwei erste
Regeln, die wir gegeben haben, sind nicht
nur leicht zu behalten, sondern auch auf
eine leichte Weise anzuwenden. Die
übrigen

übrigen aber scheinen etwas mühsamer zu seyn.

§. 67. Wir haben gezeigt, wie man die Brüche kürzer ausdrücke; nun erfordert die Ordnung, daß wir auch zeigen, wie man sie unter einerley Benennung bringe: dann man kann sie weder addiren noch voneinander subtrahiren, es seye dann, daß sie vollkommen gleiche Nenner haben. Diese Kunst nun, Brüche unter einerley Benennung zu bringen, ist gar nicht schwer, wenn man das Fundamentalgesetz der Verhältnisse recht inne hat. Denn wenn ich $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ unter einerley Benennung bringen solle, so multiplicire ich nur den Bruch $\frac{a}{b}$ durch d den Nenner des andern, und den Bruch $\frac{c}{d}$ durch b den Nenner des ersten; da dann beide Brüche nicht nur einerley Nenner bekommen, sondern auch in Absicht auf ihre Grösse den vorigen zween Brüchen vollkommen gleich bleiben werden. Dann

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \quad \text{§. 65.}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{cb}{bd} \quad \text{§. 65. folglich}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} \quad \text{welche beede letztere gleiche Nenner haben,}$$

R 2

Regel für
zween Brü-
che, die man
unter einer-
ley Benen-
nung brin-
gen solle.

Anwendung
der Regel.

Wie man
mehrere Brü-
che unter ei-
nerley Be-
nennung
bringe?

Auflösung

samt dem

Beweis

ben, wie man siehet. Die gemeine Re-
gel bey zween Brüchen wird demnach al-
so heißen: Man multiplicirt den Zeh-
ler und Nenner eines jeden Bruchs
durch den Nenner des andern. Oder
man multiplicirt beiderseits ganz übers
Creuz, und zugleich beide Nenner nach

der Quere: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$; oder in Zah-

len $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3} : \frac{5}{5} + \frac{3}{3} : \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15}$. Hat

man aber mehrere Brüche unter einerley
Benennung zu bringen, so bringt man die
obige Regel so oft an, als die Zahl der
Brüche es erfordert. Z. E. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$

werden unter einerley Benennung ge-
bracht, wenn man einen jeden ganzen
Bruch, das ist, seinen Zehler und Nen-
ner, in das Product der übrigen Nenner
multiplicirt: folglich wird man haben

$\frac{a}{b} \cdot df + \frac{c}{d} \cdot bf + \frac{e}{f} \cdot bd$, das ist, wenn man

wirklich beiderseits multiplicirt,

$$\frac{adf}{bdf} + \frac{cbf}{dbf} + \frac{ebd}{fbd} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f},$$

oder in Zahlen

$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} : \frac{5}{5} : \frac{4}{4} + \frac{2}{5} : \frac{3}{3} : \frac{4}{4} + \frac{1}{4} : \frac{3}{3} : \frac{5}{5} = \frac{20}{60} + \frac{24}{60} + \frac{15}{60}$. Das ist nun die ganze
Kunst, Brüche unter einerley Benen-
nung zu bringen. Sie gründet sich auf
das

das allgemeine Gesetz, daß ein durch eine dritte unbestimmte Zahl multiplicirter Bruch weder vermindert noch vermehrt werde, sondern einerley bleibe. Nun darf man in dem gegenwärtigen Fall nur eine solche dritte Zahl wählen, welche durch ihre Multiplication alle Nenner gleich macht, das ist, eine Zahl, deren Factores die einseitige Nenner sind. Folglich wird die allgemeine Regel diese seyn: Man multiplicire alle Nenner der Brüche miteinander, das Product wird der gemeinschaftliche Nenner werden. Hernach multiplicire man einen jeden Zehler nach dem andern in das Product aller übrigen Nenner, nur in seinen eigenen Nenner nicht; das Product wird der auf den gemeinschaftlichen Nenner sich beziehende Zehler seyn. Z. E. $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5}$ sollen unter einerley Benennung gebracht werden. Der gemeinschaftliche Nenner ist

	$= 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
der erste Zehler	$= 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
der zweite	$= 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5$
der dritte	$= 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5$
der vierte	$= 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3$

Demnach heißen die reducirte Brüche selbst:

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= \frac{90}{120} + \frac{60}{120} + \frac{80}{120} + \frac{48}{120}, = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5}. \text{ Dieses ist die gewöhnliche}$$

K 3 ste

Nutzbarkeit
der gegebenen
Regel.

ste Art, Brüche unter einerley Benennung zu bringen. Wir halten sie auch für die vortheilhafteste und bequemste Art: dann wer fertig multipliciren kann, wird bald damit zurechte kommen, und keine andere oft bloß eingeübete Hülfsmittel, Zeit und Mühe zu sparen, nöthig haben.

Von der Addition und
Subtraction
der Brüche.

§. 68. Nunmehr wird man die Regel, Brüche zu addiren und zu subtrahiren, bald verstehen. Man begreift leicht, daß sie weder addirt noch subtrahirt werden können, wenn sie nicht einerley Nenner haben. Wenn ich sechs Species Gulden und drey Species Ducaten nicht zusammen addiren und auch nicht von einander subtrahiren kann, es seye dann, daß ich beeden Geldsorten einen gemeinschaftlichen und gleichen Namen gebe; so muß ich auch bey dem Addiren und Subtrahiren der Brüche auf gleiche Nenner bedacht seyn. Wie wir sie nun finden sollen, haben wir §. 67. gezeigt. Sind aber die gleiche Benennungen einmal gefunden, so darf man nur die Zehler zusammen addiren oder von einander subtrahiren. Der gemeinste Idiot weiß dieses. Denn wenn ein Bauersmann zu $\frac{2}{4}$ Tuch noch $\frac{1}{4}$ aus dem Laden kauft, so sagt er, er habe jezo $\frac{3}{4}$ beisammen; und wenn ein Lehrling von einem Kest, der nur noch $\frac{3}{4}$ hält, $\frac{1}{4}$ verkauft, so weiß er, daß er noch $\frac{2}{4}$ übrig habe.

Warum man
bey gleichen
Nennern nur
die Zehler
addiren und
von einander
subtrahiren
dürfe.

einfachen Verhältn. u. Brüchen. 151

habe. Folglich addiret und subtrahiret man nur die Zehler; wir wollen daher diese leichte Sache nicht ohne Noth weitläufftig vortragen, und zum Beschluß nur wie man die diß einige noch melden, daß die Summe, wenn sie ein unächter Bruch würde, in ganze Zahlen durch die Division verwandelt werde; bleibt aber nach geschene Division noch ein wahrer Bruch übrig, so wird er der Summe angehängt, und nach Befinden der Umstände auch kürzer ausgedruckt. Z. E. $\frac{4}{3} + \frac{9}{10} + \frac{3}{4}$; hier bringe ich die Brüche zuerst unter gleiche Benennung; da sie dann heißen werden $\frac{4 \cdot 10 \cdot 4}{3 \cdot 10 \cdot 4} + \frac{9 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 5 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 10}{4 \cdot 5 \cdot 10} = \frac{160}{200} + \frac{180}{200} + \frac{150}{200}$. Wenn ich nun die Zehler addire, so ist die Summe ein unächter Bruch $= \frac{160 + 180 + 150}{200} = \frac{490}{200}$. In diesem Bruch läßt sich der Zehler 490, durch den Nenner 200 wirklich dividiren; da dann heraus kommt $2\frac{90}{200}$, den angehängten wahren Bruch $\frac{90}{200}$ drucke ich durch die Division mit 10 kürzer aus, und bekomme $\frac{9}{20}$; folglich heißt die ganze Summe $2\frac{9}{20}$ oder $2 + \frac{9}{20}$. Ebenso geht es bei der Subtraction: man solle von $\frac{3}{4}$ subtrahiren $\frac{1}{5}$; die Brüche werden zuerst unter einerley Benennung gebracht §. 67. und heißt folglich der Rest $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20} - \frac{4}{20} = \frac{11}{20}$. Diß ist alles, was man von der Addition und Subtraction der Brüche

Von der Addition und Subtraction der Brüche in genannten Zahlen, und in der Buchstabenrechnung.

che zu wissen nöthig hat. Will man die Operation in genannten Zahlen verrichten, so setzet man dem Bruch nur am Ende die Münzsorten, Gewichter, Maasse u. s. w. bey. Z. E. $\frac{3}{4}$ fl. — $\frac{1}{5}$ fl. = $\frac{11}{20}$ fl. denn wie man durch einen kürzern Ausdruck die Gulden zu Kreuzer u. s. w. mache, können wir gegenwärtig noch nicht zeigen, weil die Regel davon auf die Natur der Proportionen sich gründet, welche erst im folgenden Capitel vorgetragen werden. Die Addition und Subtraction der Brüche in Buchstaben ist ebenfalls mit zwey Worten noch gesagt. Man addirt oder subtrahirt die Zehler, und setz unter die Summe oder die Differenz den gemeinschaftlichen Nenner; so ist, nach geschעהner Reduction unter einerley Benennung, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ und $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$. Kommen auch Fälle vor, in welchen man plus und minus zu addiren oder von einander zu subtrahiren hat; so gehet alles nach den allgemeinen Additions- und Subtractionsregeln, die wir S. 26. 34. erkläret haben.

S. 69. Wie man Brüche addiren und subtrahiren kann, so kann man sie auch mit einander multipliciren und dividiren. Bey der Multiplication und Division der Brü-

einfachen Verhältn.u.Brüchen. 153

Brüche hat man aber diesen Vortheil, daß man sie nicht vorher unter einerley Benennung zu bringen genöthiget ist. Wir wollen zuerst von der Multiplication handeln. Die Regel davon ist allgemein, kurz und faßlich, aber etwas schwer zu beweisen. Sie heißt also: Man multiplicirt Zehler mit Zehlern, und Nenner mit Nennern; der daraus entstehende neue Bruch ist das Product der multiplicirten Brüche. Den sonst schwer scheinenden Beweis von dieser kurzen Regel wollen wir so leicht machen, als es nur möglich ist. Man muß aber die von uns umständlich schon vorgetragene Buchstabenrechnung im Kopf haben, wenn man ihn fassen will. Man solle den Bruch $\frac{a}{b}$, welcher alle mögliche Brüche vorstellt, multipliciren durch $\frac{c}{d}$, welcher ebenfalls der allgemeine Ausdruck für alle Brüche seyn kann. Nun wollen wir den Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$ mit dem Buchstaben m, und den Werth des Bruchs $\frac{c}{d}$ mit dem Buchstaben n bezeichnen. Folglich wird, wenn man die mathematische Sprache und ihre Grundsätze in der Einleitung zu Rathe ziehet, nachstehende

Von der
Multiplication der Brüche.

Warum man
nur die Zehler mit Zehlern, und Nenner mit Nennern multipliciren müsse?

Beweis.

Rechnung niemand unverständlich seyn:

$$\begin{array}{r}
 \frac{a}{b} = m \quad \cdot \quad \frac{c}{d} = n \\
 \hline
 \quad \cdot b \quad \quad \cdot d \\
 a = bm \quad c = dn \\
 c = dn \\
 \hline
 ac = bdmn \\
 \hline
 \quad : bd \\
 \frac{ac}{bd} = mn.
 \end{array}$$

Hieraus siehet man, daß das Product der Werthe der zween gegebenen Brüche, nemlich mn , gleich seye dem Ausdruck $\frac{ac}{bd}$; dieser Ausdruck aber ist nichts anders als $\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$; folglich werden Brüche miteinander multiplicirt, wenn man ihre Zehler und Nenner nach der gegebenen Regel, miteinander multiplicirt. In wirklichen Zahlen ist also das Product aus $\frac{1}{3}$ in $\frac{4}{5} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{4}{15}$; das Product $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$ u. s. w. Man siehet aber bey wirklichen Zahlen leicht, daß der multiplicirte Bruch kleiner werde, als seine Factores waren. Dann $\frac{1}{8}$ ist kleiner als $\frac{1}{2}$, und auch kleiner als $\frac{1}{4}$. Allein die Ursache ist wohl begreiflich. Denn wenn ich einen Bruch mit einem wahren Bruch multiplicire, so nehme ich ihn nicht etlichmal ganz, sondern

Anwendung
der Regel
auf besonde-
re Fälle.

warum durch
die Multipli-
cation der

dern ein halbmal, ein viertelmal, u. s. w. Brüche das
 folglich muß das Product kleiner werden. Product klein
 Man kann es auch aus gemeinen Exem- ner werde,
 peln lernen. Wenn ein Bauersmann die als die Factor
 Hälfte von einer halben Ehle, oder eine res waren.
 halbe Ehle nur halben kaufen will oder
 nöthig hat; so weiß er wohl, daß er nur
 eine viertels Ehle bekommt oder braucht;
 folglich, daß die Hälfte einer halben E-
 hle, oder eine halbe Ehle ein halbmal ge-
 nommen, das ist, das Product zweyer
 Brüche, kleiner seye, als der noch nicht
 multiplicirte Bruch der halben Ehle; wenn
 er schon die hier genannte Kunstworte nicht
 zugleich mit hinzudenket. Dieses Exem- Uebereins-
 pel ist ein Beweis, daß es nicht nur ei- stimmung
 ne natürliche Mathematik gebe, sondern der natürli-
 auch, daß die künstliche Mathematik von chen und
 der natürlichen eben so wenig dem Wes- künstlichen
 sen nach unterschieden seye, als die künst- Mathematik.
 liche Logik von der natürlichen unter-
 schieden ist.

§. 70. Bey der Multiplication der Wie man
 Brüche ist nur ein Fall besonders noch Brüche mit.
 zu merken übrig. Es kann geschehen, daß ganzen Zah-
 man ganze Zahlen und Brüche mit einan- len multipli-
 der multipliciret. Nun fragt man, ob cire,
 man in diesem Fall die ganze Zahl mit
 dem Zehler oder mit dem Nenner des
 Bruchs, oder mit beeden zugleich multi-
 pliciren müsse? Die Antwort ist leicht,
 wenn man weiß, was eine ganze Zahl
 ist,

und warum
man die ganze
Zahl nur
mit dem Zeh-
ler des
Bruchs mul-
tipliciren
dürfe.

ist, oder wie man sie ansehen könne. Eine ganze Zahl ist eine gewisse Menge von Einheiten; folglich hat sie Eins zu ihrem Nenner. Ich darf also eine jede ganze Zahl als einen Bruch ansehen, dessen Nenner Eins ist; dann Eins dividirt nicht, und die Zahl $\frac{6}{1}$ wird der Zahl 6 vollkommen gleich seyn. Durch diese Anmerkung kann ich nun den vorgegebenen Fall auf die allgemeine Multiplicationsregel der Brüche reduciren, und sagen $6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6 \cdot 3}{1 \cdot 4} = \frac{18}{4} = 4 \frac{2}{4} = 4 \frac{1}{2}$. Damit ich aber nicht unnöthige Mühe habe, so kann ich, weil ich sehe, daß nur der Zehler mit der ganzen Zahl multiplicirt wird, und Eins den Nenner weiter nicht multiplicirt §. 39. folgende Regel festsetzen: Wenn man Brüche mit ganzen Zahlen multiplicirt, so multiplicirt man nur den Zehler mit der ganzen Zahl. Weil nun überdas, wie leicht zu erachten ist, in diesem Fall das Product grösser wird, als der noch nicht multiplicirte Bruch war; so giebt es einen unächten Bruch, den man durch die wirkliche Division in ganze Zahlen verwandeln, und ihnen, wenn ein wahrer Bruch noch übrig bleibt, solchen anhängen muß. Die Multiplication der genannten Zahlen macht hier keinen Unterschied. Was endlich die Buchstaben betrifft, so haben wir aus dem Beweis der

Haupt:

Von der
Multiplication
der
Brüche in
genannten

Hauptregel die Art ihrer Multiplication Zahlen und zugleich gesehen. Sollte man aber plus in der Buchstabenrechnung. mit minus, oder minus mit minus in Brüchen multipliciren, so richtet sich die Operation abermalen nach den allgemeinen Regeln der Multiplication in ganzen Zahlen, davon wir J. 42. 55. gehandelt haben.

J. 71. Man kann auch Brüche durch Von der Division der Brüche. Brüche dividiren. So leicht und kurz nun abermal die Divisionsregel hier ist, so schwer pfleget manchen der Beweis davon zu fallen. Die Regel selbst ist die folgende: Wenn Brüche einander dividiren, so wird nur der Divisor, Allgemeine Regel, oder der dividirende Bruch, umgekehrt, und hernach die ganze Operation in eine Multiplication verwandelt. Wir wollen den Beweis nach eben denjenigen Sätzen vortragen, nach welchen wir den Beweis der Multiplication eingerichtet haben, folglich ihn wiederum so leicht machen, als nur immer möglich ist. Es

seyen uns zween Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gegeben; der letztere nemlich $\frac{c}{d}$ solle der Divi-

sor des erstern $\frac{a}{b}$ seyn. Nun fragt man:

wie wird der Quotient von der bloß an-

Beweis.

gezeigten Division $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ aussehen? Wir wollen ihn durch einen Bruch $\frac{m}{n}$ ausdrücken: dann er mag eine ganze oder gebrochene Zahl seyn, so wird der Ausdruck $\frac{m}{n}$ sich auf ihn schicken. Im erstern Fall ist eben n hernach eins. Unser Satz ist also richtig; es seye also:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{m}{n};$$

$$\cdot \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{cm}{dn}$$

$$\cdot dn$$

$$\frac{adn}{b} = cm$$

$$\cdot b$$

$$adn = bcm$$

$$: n$$

$$ad = \frac{bcm}{n} \text{ oder}$$

$$ad = bc \cdot \frac{m}{n}$$

$$: bc$$

$$\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$$

einfachen Verhältn.n.Brüchen. 159

Da nun $\frac{m}{n}$ der Quotient ist, und dieser

Quotient dem Bruch $\frac{ad}{bc}$ gleich gefunden

worden; so sehen wir, wie der Bruch $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ nach geschעהener Division aussiehet,

dann er ist $= \frac{ad}{bc}$; oder $\frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}$. §. 69.

Weil also $\frac{d}{c}$ nur der umgekehrte Divisor ist,

so begreift man den Grund der Regel,

welche uns lehret, man solle den Divi-
sor umkehren und hernach multipliciren.

Anwendung
der Regel
auf wirkliche
Zahlzeichen.

In wirklichen Zahlzeichen ist also die Ope-
ration nicht schwer: Man dividire $\frac{6}{10}$

durch $\frac{3}{4}$ so wird der Quotient seyn $\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{3}$

oder $\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$ nach §. 66. Eben

so ist der Quotient von $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1} =$

• $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ u. s. w. Man siehet aber

Warum bey
der Division
der Brüche
der Quotient
größer wer-
de, als die
zu dividirende
Zahl war.

auch hieraus, daß bey der Division der

Brüche durch Brüche, der Quotient grö-

ßer werde als die zu dividirende Zahl.

Die Ursach ist nicht schwer zu begreifen:

Im gemeinen Leben verstehet man ja ei-

nen, wenn man sagt: $\frac{3}{4}$ dividirt durch $\frac{1}{4}$

giebt den Quotienten 3; man muß sich

nur anders ausdrucken, und keine Kunst-

wörter gebrauchen. Denn wenn ich fra-

ge, wie vielmal sind $\frac{3}{4}$ Tuch größer als $\frac{1}{4}$,

so

so wird ein Kind antworten und sagen können: drey mal; oder wenn ich frage, wie oft ist ein Viertel in drey Vierteln enthalten, so sagt man drey mal. Diese Frage aber heißt in den Kunstwörtern nichts anders, als: wie viel kommt heraus oder was ist der Quotient, wenn ich $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{4}$ dividire. Denn wenn ich wirklich dividire, so heißt der Quotient $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = \frac{3}{4} : \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 1} = 3$. Der allgemeine Grund, warum die Quotienten grösser werden, ist also die in der Natur der Brüche gegründete Anmerkung: daß ein Bruch den andern nicht nur ein halb, ein drittelmal, u. s. w. sondern auch etlich ganze mal in sich enthalten könne. Bey den Brüchen findet sich also in Rücksicht auf die ganze Zahlen gerade das Gegentheil von dem, was im 2 Capitel erwiesen worden ist. Nämlich die Multiplication verkleinert den Bruch, die Division aber vergrößert ihn; und zwar beedes aus sichern Gründen, welche den in dem zweiten Capitel von ganzen Zahlen angeführten Beweisen nicht widersprechen.

Wie man
Brüche
durch ganze
Zahlen,

§. 72. Wenn man Brüche mit ganzen Zahlen dividirt, so bedient man sich eben des Vortheils, den wir bey der Multiplication genannt haben. Man siehet nemlich den Divisor als einen Bruch an, dessen Nenner eins ist, lehret ihn her,

hernach um, und multiplicirt nach der und ganze
 Regel §. 70. z. E. $\frac{3}{4} : 6 = \frac{3}{4} : \frac{6}{1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}$, Zahlen wie
 $= \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 6} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$. Um nun die Rech, derum durch
 nung kürzer zu machen, weiß eins weder Brüche divis
 multiplicirt noch dividirt; so giebt man die dire.
 Regel: Man solle den Divisor, wenn
 er eine ganze Zahl ist, bloß in den
 Nenner des zu dividirenden Bruchs
 multipliciren; der neue Bruch wird der
 Quotient seyn. Z. E. $\frac{1}{4} : 8 = \frac{1}{4 \cdot 8} = \frac{1}{32}$
 u. s. w. Ist aber die zu dividirende Zahl
 eine ganze Zahl, und der Divisor ein
 Bruch, so wird eben der Divisor umge
 kehrt, und weil die zu dividirende Zahl
 auch einem Bruch gleicht, dessen Nenner
 eins ist, die Multiplication nach der Res
 gel verrichtet. §. 70. Z. E. 6 sollen durch
 $\frac{1}{2}$ dividirt werden; das ist, $\frac{6}{1} : \frac{1}{2} = \frac{6}{1} \cdot \frac{2}{1}$
 $= \frac{6 \cdot 2}{1} = 12$. Eben so ist $8 : \frac{3}{4} = \frac{8}{1} \cdot \frac{4}{3}$
 $= \frac{8}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$. In Buchstaben ist
 also die Division folgende: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1}$ Von der Di
 vision der
 Brüche in
 Buchstaben
 und genann
 ten Zahlen.
 $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$; und $c : \frac{a}{b} = \frac{c}{1} : \frac{a}{b} = \frac{c}{1} \cdot \frac{b}{a}$
 $= \frac{bc}{a}$. Sollte minus mit plus, oder mi
 nus mit minus dividirt werden, so richtet
 man sich nach den allgemeinen Divisions
 Regeln C. II. §. 55. Ein gleiches müs
 sen wir von der Division in genannten
 Zahlen sagen.

Wie man
einfache
Größen
durch zusam-
mengesetzte
dividire, oder
von der Vers-
wandlung
der Brüche
in unendli-
che Ketten
oder Pro-
gressionen.

§. 73. Es ist nur noch übrig, daß wir nach unserem Verspruch zeigen, wie man eine einfache GröÙe durch eine zusammengesetzte dividirt, und solche nicht nur anzeigt, sondern wirklich dividirt; oder wie man einen wahren Bruch, das ist, den Zehler durch den Nenner wirklich dividirt und den Quotienten in eine unendliche Reihe verwandeln könne. Es sey die zu dividirende Zahl a , und der Divisor $b+c$; folglich der Bruch $\frac{a}{b+c}$; nun dividire man wirklich:

$$(b+c) \overline{) \frac{a}{b}} = \frac{ac}{bb} + \frac{acc}{bbb} - \frac{accc}{bbbb} \text{ u. s. w.}$$

$$\begin{array}{r} a + \frac{ac}{b} \\ \hline - \frac{ac}{b} \end{array}$$

$$(b+c)$$

$$\begin{array}{r} \frac{ac}{b} - \frac{acc}{bb} \\ \hline \end{array}$$

$$+ \frac{acc}{bb}$$

$$(b+c)$$

$$+ \frac{acc}{bb} + \frac{accc}{bbb}$$

$$\begin{array}{r} \hline - \frac{accc}{bbb} \end{array}$$

u. s. w.

$$(b+c)$$

Denn

einfachen Verhältn. u. Brüchen. 163

Denn wenn ich wirklich dividire, so sage ich
 b in a ist enthalten $\frac{a}{b}$ mal; $\frac{a}{b}$ multiplici-

cirt in $b + c$ ist $\frac{ab}{b} + \frac{ac}{b}$ das ist: $a + \frac{ac}{b}$

(§. 55.) a von a geht auf, bleibt also —

$\frac{ac}{b}$, weil $+$ $\frac{ac}{b}$ von nichts subtrahirt im

Reste giebt — $\frac{ac}{b}$; §. 55. Diese übrig ge-

bliebene Grösse dividire ich abermal mit

meinem Divisor $b + c$, und sage b in —

$\frac{ac}{b}$ ist enthalten $-\frac{ac}{bb}$ mal, oder giebt den

Bruch $-\frac{ac}{bb}$. Nun multiplicire ich den

neuen Quotienten mit dem Divisor, und

sage $-\frac{ac}{bb} \cdot b + c$ giebt $-\frac{abc}{bb} - \frac{acc}{bb} = -$

$\frac{ac}{b} - \frac{acc}{bb}$; $-\frac{ac}{b}$ von $-\frac{ac}{b}$ geht auf; —

$\frac{acc}{bb}$ von nichts abgezogen läßt $+\frac{acc}{bb}$;

§. 55. Diesen Rest dividire ich abermal

durch $b + c$; und sage: $+$ b in $+\frac{acc}{bb}$ giebt

den Bruch $+\frac{acc}{bbb}$, welcher der neue Quo-

tient ist; dieser Quotient wird wiederum

in den Divisor $b + c$ nach den allgemeinen Divisions-Regeln multiplicirt, und giebt

$$\text{das Product } \frac{abcc}{bbb} + \frac{accc}{bbb} = \frac{acc}{bb} + \frac{accc}{bbb} ;$$

$\frac{acc}{bb}$ von $\frac{acc}{bb}$ geht auf, und $\frac{accc}{bbb}$ von nichts

subtrahirt, läßt den Rest $-\frac{accc}{bbb}$. Diesen

dividire ich wieder, und setze die Operation bis ins unendliche fort. Es ist aber

nicht nöthig, daß ich so viel Mühe habe:

dann ich darf nur den Quotienten be-

trachten, so sehe ich schon, nach welchem

Gesetze die Progression fortgehet. Er

heißt $\frac{a}{b} - \frac{ac}{bb} + \frac{acc}{bbb} - \frac{accc}{bbbb}$ u. s. w. oder

kürzer $\frac{ab}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4}$ u. s. w. folg-

lich wechseln die Zeichen mit einander ab,

die Nenner sind alle b , und steigen so in

den Dignitäten, daß ihre Exponenten

die in der Ordnung fortgehende natürli-

che Zahlzeichen sind; die Zehler sind alle

multiplicirt in die von Nulle anfangende

und sodann in natürlicher Ordnung fort-

gehende Dignitäten von c . Demnach

wird das folgende Glied heißen $+\frac{ac^4}{b^5}$,

und nach diesem wird kommen $-\frac{ac^5}{b^6}$ u.

s. w.

Warum man die Division nur auf 4 bis 6 Glieder fortsetzen dürfe, und wie man hier nach die Regel der Progression finden könne;

einfachen Verhältn.u.Brüchen. 165

f.w. Wann nun $a = 1$, $c = 1$, und b

$= 2$, so ist $\frac{a}{b+c} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$ u. f.w. Ist aber auch $b = 1$, Was der Bruch $\frac{1}{2}$ für eine Progression gebe.

so ist $\frac{a}{b+c} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ u. f.w. Dann

man darf nur die Reihe $\frac{a}{b+c}$ hersehen: so kommt heraus

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5} \text{ u. f.w.} \right.$$

$$\left| \frac{1}{1} - \frac{1 \cdot 1}{1^2} + \frac{1 \cdot 1^2}{1^3} - \frac{1 \cdot 1^3}{1^4} \text{ u. f.w.} \right.$$

Nun aber dividirt und multiplicirt eins nicht, und eins ist in der zwanzigsten Dignität nicht grösser als in der ersten, das ist: Eins zwanzigmal mit sich selbst multiplicirt, oder 1^{20} ist eben eins. Folg-

lich wird die zweite Reihe heissen $\frac{1}{1+1}$

$$= \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$$

u. f.w. Guido Grandus hat aus dieser Reihe beweisen wollen, daß unendlich viele Nullen in der Summe $\frac{1}{2}$ machen.

Der ganze Fehler aber bestunde darinnen, daß er diese unendliche Reihe Zahlen wie endliche Zahlen behandelt, und geglaubt hat, sie seye entweder gleich oder ungleich (numerus par vel impar). Ist sie gleich,

Vorläufige Anzeige, was man bey den unendlichen Progressionen zu bemerken und zu verhalten habe.

so ist ihre Summe, weil allemal ein gleiches Paar $1 - 1 = 0$, eine Summe von lauter Nullen; ist sie aber ungleich, so glebt es allemal einen Ueberschuß entweder von -1 oder $+1$; folglich wäre $\frac{1}{2}$ entweder -1 oder $+1$. Das aber ist noch widersinnlicher als das erste, daß $\frac{1}{2}$ eine unendliche Menge von Nullen seye. Die Antwort ist leicht: was unendlich ist, das ist weder eine gleiche noch ungleiche, sondern eine unendliche Zahl. Man muß also in diesem Fall den Rest, welcher immer $\frac{1}{2}$ bleibt, zur Summe, wenn sie auch unendlich wäre, noch addiren, oder diese Reihe gar für unbrauchbar ansehen. Wir werden aber von dergleichen Reihen im folgenden Capitel handeln. Uebrigens merken wir nur diß einige noch an, daß die Zeichen im Quotienten nicht abwechseln, wenn man a durch $b - c$ dividirt: dann in diesem Fall, wenn man wirklich dividirt, bekommt man

$$\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} + \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5} \text{ u. s. w.}$$

Wir wollen das Exempel nicht ausführlich hersehen; wer das obige sich bekannt gemacht hat, wird dieses leicht von selbst und ohne Mühe durch die wirkliche Division finden können. Eines melden wir noch: wenn einer wissen wollte, wie groß eins in Brüchen wäre, so darf er nur setzen

Wie der Divisor beschaffen seye, wenn die Quotienten oder die Glieder der Progression in ihren Zeichen nicht abwechseln;

wie Eins in eine unendliche Reihe von Brüchen

zen

einfachen Verhältn.u.Brüchen. 167

zen $a = 1, b = 2, c = 1$. Da er dann verwandelt werden könne, und wie die Summe von unendlich viel Einsen ausgedruckt werde.
 haben wird $\frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
 $+ \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ u. s. w. Und wollte
 er wissen, wie groß eine unendliche Summe von Einsen wäre, so darf er nur auch

$b = 1$ machen, $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = 1 + 1 + 1$
 $+ 1 + 1 + 1$ u. s. w. Folglich wäre Eins,
 durch Null getheilt, unendlich: dann
 eins ist wirklich unendlich mal grösser als
 nichts. Doch genug hiervon. Im fol-
 genden Capitel finden diese Rechnungen
 erst ihren eigenen Platz, woselbst wir zu-
 gleich die hier einfallende Schwierigkeiten
 auflösen werden.

§. 74. Nunmehr könnten wir dieses
 Capitel beschliessen, wenn wir nicht in der
 Materie von den Dignitäten gehört hät-
 ten: daß auch die Exponenten Brüche
 haben. Weil man nun die Dignitäten ad-
 diren, subtrahiren, multipliciren und di-
 vidiren kann, so ist es in allewege nöthig,
 daß wir zeigen, wie diese Operationen
 verrichtet werden, wenn die Exponenten der
 Dignitäten Brüche sind; z. E. wie man

Wie man Dignitäten, deren Exponenten Brüche sind, addiren und subtrahiren solle.

$x^{\frac{1}{2}}$ zu $x^{\frac{2}{3}}$ addire, oder davon subtrahire,

ferner wie man $a^{\frac{3}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{4}}$ multiplicire oder
 dividire u. s. w. Die ganze Kunst wird
 auch hier auf die allgemeine Regeln, die
 Brüche zu behandeln, ankommen. Bey
 der Addition und Subtraction bringt

man sie zuerst unter einerley Benennung, ehe man wirklich addirt oder subtrahirt. Diese Regel muß also auch bey den Exponenten, wenn sie Brüche sind, in ihrer

Art statt finden. Folglich wird $x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}}$

was man da
bey besonders
zu beobachten
habe;
 $= x^{\frac{3}{6}} + x^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{x^3} + \sqrt[6]{x^4}$ seyn. Hier hat man sich nun wohl in Acht zu nehmen, daß man die Regel nicht zu weit ausdehnt, und den Schluß macht: die

Summe von $x^{\frac{3}{6}} + x^{\frac{4}{6}}$ seye folglich =

$x^{\frac{3+4}{6}} = x^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{x^7}$. Das wäre ein

Hauptfehler wider die Buchstaben-Rechnung und wider diejenigen Regeln, die wir S. 56. 57. vorgetragen und erwiesen haben. Durch die Addition der Exponenten werden ja die Dignitäten mit einander multiplicirt; folglich wäre der Fehler so groß, als groß derjenige ist, wenn man, was addirt werden soll, mit einander multiplicirt. Wie nun ein beträchtlicher Unterschied zwischen $x^2 + x^2$, und zwischen x^{2+2} oder x^4 ist; so ist nicht weniger ein gleich grosser Unterschied zwischen

$x^{\frac{2}{6}} + x^{\frac{2}{6}}$ und zwischen $x^{\frac{2+2}{6}}$ oder $x^{\frac{4}{6}}$.

Darauf hat man nun sorgfältig Achtung zu geben; nicht als ob es eine Ausnahme der Regel wäre, sondern weil dieser Umstand ausdrücklich in der Regel enthalten ist. Man siehet hieraus, wie bestimmt

die Mathematik sehe, und wie accurat sie und wie accurat einen die
einen mache. Die Regel heißt: Wenn Mathematik
man die Exponenten addirt, so werden und die An-
die Dignitäten multiplicirt; folglich darf wendung ihrer
ich keine Exponenten, auch nicht einmal Regeln mache.
in Brüchen addiren, wenn man verlangt,
daß ich Dignitäten addiren solle. Denn
unerachtet die Regel der Brüche auch all-
gemein ist, und bey der Addition der
Exempeln nach geschehener Reduction mich
die Zehler addiren heißt; so sind ja in den
vorgegebenen Exempeln die Brüche keine
leere Brüche, sondern zugleich Exponen-
ten der Dignitäten: folglich kann ich die
Additionsregeln der Brüche hier nicht ganz
gebrauchen, wenn ich nicht achtlos han-
deln, und die Regeln der Aufmerksamkeit
verlezen will. Was aber die Red-
uction unter einerley Benennung betrifft,
so findet sich bey den Dignitäten kein Um-
stand, der die Anwendung des allgemei-
nen Fundamentalgesetzes aller geometri-
schen Verhältnisse nicht gestatten sollte.

Also wird die Potenz $a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2}} = a^{\frac{6}{8}}$,

die Potenz $x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4}} = x^{\frac{4}{12}}$ u. s. w.

folglich auch allgemein: $x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{ms}{ns}}$, und

$x^{\frac{r}{s}} = x^{\frac{nr}{ns}}$ u. s. w. daher die Summe von

$$x^{\frac{m}{n}} + x^{\frac{r}{s}} = x^{\frac{ms}{ns}} + x^{\frac{nr}{ns}} \text{ oder } \sqrt[n]{x^{ms}} + \sqrt[n]{x^{nr}}$$

§ 5

$\sqrt[n]{x^{nr}}$; und ihre Differenz $x^{\frac{ms}{ns}} - x^{\frac{nr}{ns}}$, oder
 $\sqrt[n]{x^{ms}} - \sqrt[n]{x^{nr}}$; nicht aber $x^{\frac{ms-nr}{ns}}$, dann

das wäre der Quotient von $x^{\frac{m}{n}}$ dividirt

durch $x^{\frac{r}{s}}$, wie wir nun gleich hören werden. Man siehet hieraus, wie man die Dignitäten unter schicklichere Ausdrücke bringen könne. So ist z. E. $x^m - 1 =$

$$x^{\frac{mn-n}{n}} = \sqrt[n]{x^{mn-n}}; \text{ ferner } x^m = x^{\frac{1}{n} \cdot \frac{n}{m} \cdot mn} = \sqrt[n]{x^{mn}}$$

$= \sqrt[n]{x^n}$ u. s. w. Welche Ausdrücke einem öfters in Gleichungen mit andern Potenzen wohl zu statten kommen.

Wie man
Dignitäten,
deren Expo-
nenten Brüche
sind, mit
einander
multiplicire
und dividire.

S. 75. Bey der Multiplication der Potenzen, deren Exponenten Brüche sind, geht es nach der allgemeinen Regel S. 57. nemlich die Exponenten werden blos addirt. Weil man sie aber nicht addiren kann, wenn sie nicht vorher unter einerley Benennung gebracht werden; so muß man zuerst gleiche Nenner für sie nach der allgemeinen Regel S. 67. erfinden. So

$$\text{ist } x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{3}{6}} \cdot x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{3+4}{6}} = \sqrt[6]{x^{3+4}} \\ = \sqrt[6]{x^7}; \text{ und } x^{\frac{m}{n}} \cdot x^{\frac{r}{s}} = x^{\frac{ms}{ns}} \cdot x^{\frac{nr}{ns}} = \\ x^{\frac{ms+nr}{ns}} = \sqrt[n]{x^{ms+nr}}; \text{ ferner } x^{\frac{-1}{m}} \cdot x^{\frac{1}{m}} = x$$

$= x^{\frac{-1+1}{m}} = x^{\frac{0}{m}} = x^0 = 1$. Man darf nur die Probe in Zahlen machen, so wird man die Wahrheit des Ausdrucks leicht erfahren. Es seye z. E. $x=4$, $m=2$.

so wird seyn $x^{\frac{-1}{m}} = 4^{\frac{-1}{2}} = \sqrt[2]{4^{-1}} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}}$

und $x^{\frac{1}{m}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4}$ nun ist $\sqrt[2]{4} = 2$,

und $\sqrt[2]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$; und $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, wie wir oben in der allgemeinen Rechnung gefunden. Will man Dignitäten, deren Exponenten Brüche sind, dividiren, so wird der Exponent des Divisors von dem Exponenten der zu dividirenden Dignität

subtrahirt, z. E. $x^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2-1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}$

$= \sqrt[3]{x}$. Sollten die Nenner der Exponenten ungleich seyn, so werden sie vorher unter einerley Benennung gebracht, und sodann nach der Regel die Zehler subtrahirt.

z. E. $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{4}{8}} : a^{\frac{2}{8}} = a^{\frac{4-2}{8}} =$

$a^{\frac{2}{8}} = \sqrt[2]{a^2}$; diese Operation richtet sich Probe und abermal bloß nach den Divisionsregeln Exempel der der Potenzen. Man darf nur wiederum Regeln in die Probe in wirklichen Zahlen machen, Zahlen.

und setzen $a=16$; so ist $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = 4$

und $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a} = 2$. Dann 16 ist die viers

vierte Dignität von 2. Folglich wird

$$16^{\frac{1}{2}} : 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[2]{16} : \sqrt[4]{16} = 4 : 2 = 2.$$

Eben das ist auch $16^{\frac{2}{8}} = \sqrt[8]{16^2}$; dann 16^2 oder 16 in der zweiten Dignität ist = $16 \cdot 16 = 256$; und 256 ist die achte Dignität von 2; wie man leicht aus be-
gesetzter Progression sehen kann:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Folglich ist $2 = \sqrt[8]{256} = \sqrt[8]{16^2}$. Dem-
nach wird auch allgemein und in der Buch-

stabenrechnung seyn $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ms}{ns}} : a^{\frac{nr}{ns}} =$
 $a^{\frac{ms-nr}{ns}} = \sqrt[ns]{a^{ms-nr}}$. Wie man nun

Dignitäten von dieser Gattung multipli-
ciren und dividiren kann; so lassen sie
sich auch zu höhern Dignitäten erheben,
oder in niedrigere heruntersetzen. Jenes
geschiehet durch die Multiplication, dieses
durch die Division der Exponenten. Wenn

ich also $x^{\frac{1}{2}}$ zur dritten Dignität erheben
oder dreyimal mit sich selbst multipliciren
will, so wird die neue Dignität heißen

$x^{\frac{1}{2} \cdot 3} = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{x^3}$; und wenn ich $x^{\frac{n}{m}}$
zur Dignität r erheben will, so heißt dies

se neue Potenz $x^{\frac{nr}{m}}$. Wer Exempel in Zahl-
zeis

Wie man
solche Digni-
täten zu hö-
hern erheben,
oder gegebene
Wurzeln aus
derselben aus-
ziehen könne.

zeichen nachrechnen will, wird sogleich die Probe davon machen können. Sollen

endlich die Cubic-Wurzel oder $\sqrt[3]{}$ aus $x^{\frac{1}{2}}$ gefunden werden, so ist die gesuchte Zahl

$\frac{1:3}{x^2} = x^{\frac{1}{2 \cdot 3}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$. Auch hievon kann man die Probe in wirklichen Zahlzeichen machen. Der allgemeine Ausdruck

wird also der folgende seyn: $\sqrt[m]{x^{\frac{r}{s}}}$

$= x^{\frac{r:m}{s}} = x^{\frac{r}{ms}} = \sqrt[ms]{x^r}$; u. s. w. Alle diese Ausdrücke sind so beschaffen, daß man einen für den andern setzen kann, wenn die Rechnung dadurch hie und da sich erleichtern und faßlicher machen läßt. Wir wollen keine weitere Exempel anführen. Denn wenn man die S. 56 — 58. und überhaupt das bisherige mit Aufmerksamkeit gelesen hat; so wäre es etwas seltsames, wenn man die von uns gegebene Ausdrücke nicht verstünde, und keine ähnliche sogleich nachmachen könnte.



Viertes Capitel.

Von den Proportionen und
den daraus fließenden Regeln,
wie auch von den Progref-
sionen.

§. 76.

Was eine
Proportion
überhaupt
seye, und
wie die Pro-
portionen
eingertheilet
werden.

Wie man
auf die Na-
tur der
arithmeti-
schen Pro-
portionen
kommen,

Die Gleichheit zweier Verhältnisse heißt eine Proportion. Nun giebt es arithmetische und geometrische Verhältnisse; §. 61. folglich giebt es auch arithmetische und geometrische Proportionen. Da nun eine arithmetische Verhältniß durch $a - b$ ausgedruckt, und bey diesem Ausdruck auf die Differenz gesehen wird; so darf man nur zum ersten Glied die Differenz addiren, da dann die Summe allemal das zweite Glied seyn muß. Der Beweis davon gründet sich blos auf die Erklärung der Subtraction, davon wir umständlich gehandelt haben. Dann wenn ich die arithmetische Verhältniß zwischen 2 und 5 suche, so will ich wissen, um wie viel 5 grösser sey als 2; da ich dann sogleich finde, daß die Differenz 3 und die gesuchte Zahl einerley sey. Addire ich nun 3 zu dem ersten Glied 2, so habe ich $2 + 3$ oder 5, welches das zweite Glied ist. Folglich ist $2 - 5 = 2 - (2 + 3)$ oder nach der allgemeinen Rechnung $a - b$

Proportionen u. Progressionen. 175

$b = a - (a + d)$. Wenn also die Differenz d ist und das erste Glied a , so wird der Ausdruck für alle mögliche arithmetische Verhältnisse seyn $a - (a + d)$. Zwei arithmetische Verhältnisse werden einander gleich, wenn ihre Differenz einerley ist, und durch diese Gleichheit entsteht eine arithmetische Proportion; wenn demnach das erste Glied a und das dritte b heisset, so ist der allgemeine Ausdruck für alle arithmetischen Proportionen der folgende: $a - (a + d) = b - (b + d)$. Denn wenn ich von dem zweiten Glied das erste a subtrahire, so ist die Differenz d ; und wenn ich von dem vierten Glied das dritte b subtrahire, so ist die Differenz abermal d . Wenn das dritte Glied dem zweiten gleich ist, oder wenn $a + d = b$, so ist die Proportion continuirlich, (proportio continua); wenn aber diese beide Glieder ungleich sind, so heisset die Proportion eine abgesonderte oder discrete Proportion; (proportio discreta). Z. E. $4 - 6$ ist eine arithmetische Verhältniß, deren Differenz 2 ist; nun wird eine Proportion daraus, wenn ich eine andere arithmetische Verhältniß von gleicher Differenz aufsuche, z. E. $3 - 5$; dann $4 - 6 = 3 - 5$ oder $2 - (4 + 2) = 3 - (3 + 2)$; dieses ist nun eine discrete Proportion; sie wird aber continuirlich, wenn das dritte Glied dem zweiten gleich bleibt und auch 6 heisset:

und sie auf eine allgemeine Weise ausdrücken könne?
 Was eine continuirliche arithmetische Proportion (proportio continua) und was eine abgesonderte (discreta) seye.

b. E.

z. E. $4 - 6 = 6 - 8$, oder $4 - (4 + 2) = (4 + 2) - (4 + 2 + 2)$, und in Buchstaben $a - (a + d) = a + d - (a + 2d)$. Die Zahlen oder Buchstaben, die in einer solchen Proportion, sie mag hernach arithmetisch oder geometrisch seyn, vorkommen, nennet man Glieder, und zwar nach der Stelle, wo sie stehen, das erste, das zweite, das dritte, das vierte Glied.

Namen der
Glieder einer
Proportion.

§. 77. Wir handeln zuerst von den arithmetischen Proportionen; ihr allgemeiner Ausdruck ist $a - (a + d) = b - (b + d)$. Nun wollen wir sehen, was für Eigenschaften diesem wesentlichen Ausdruck der arithmetischen Proportionen zukommen. Wenn wir das erste und vierte Glied zusammen addiren, so wird ihre Summe der Summe der beiden mittleren gleich seyn: denn $a + b + d = a + d + b$.

Der erste Ausdruck ist die Summe der beiden äussersten, der zweite aber die Summe der beiden mittlern Glieder. Da nun diese Summen augenscheinlich gleich sind, so haben wir ein sicheres und untrügliches Kennzeichen, nach welchem wir die arithmetische Proportionen beurtheilen können. So oft nemlich die Summe der beiden äussersten und der beiden mittleren Glieder gleich ist, so oft ist die vorgegebene Proportion eine arithmetische Proportion. Wenn also einer das vierte Glied

und wie man
die Proportio:
nen selbst dar:
nach beurthei:
len solle?

Glied suchen soll, so wird er es nach dieser Regel bald finden: denn es seye gegeben das erste Glied a , das zweite b und das dritte c ; nun wollen wir das vierte x nennen: folglich wird die Proportion heißen $a : b = c : x$. Da nun nach der Regel $a + x = b + c$. So wird J. 9.

$$\begin{array}{r} a = a \\ \hline x = b + c - a. \end{array}$$

Wie man das vierte Glied u. s. w. in einer arithmetischen Proportion suche?

Also wird das vierte Glied gefunden, wenn man von der Summe des zweiten und dritten Gliedes das erste Glied abzieht. Dieses solle zu gegenwärtiger Absicht genug seyn; wie man die mittlere Glieder in continuirlichen Proportionen, und hernach auch in Progressionen andere Glieder suchen und finden solle, werden wir in diesem Capitel noch zeigen, wenn wir zuvor von den geometrischen Proportionen, die einen ungleich grössern und auf alle Theile der Mathematik sich erstreckenden Nutzen haben, das nöthigste gesagt haben.

J. 78. Eine geometrische Proportion ist die Gleichheit zweier geometrischen Verhältnisse; sie wird, wie die arithmetische Proportion, in eine discrete und continuirliche eingetheilt. Wie man nun bey der ersten auf die Differenz siehet; so siehet man bey dieser, kraft der Natur der geometrischen Verhältnisse, auf den Quotienten.

Was eine geometrische Proportion seye, ihr Unterschied von den arithmetischen Proportionen.

Allgemeiner
Ausdruck für
die geometri-
sche Propor-
tionen.

Wie man die
wesentliche
Eigenschaf-
ten der geo-
metrischen
Proportionen
nach und nach
erfinden solle,
wird ange-
zeigt.

ten. Da nun der allgemeine Ausdruck einer geometrischen Verhältniß $a : ma$ ist, § 65. so wird der allgemeine Ausdruck für alle geometrische Verhältnisse seyn: $a : ma = b : mb$; oder, wie wir umständlich § 65. erwiesen haben, $a : b = ma : mb$. Diese Fundamentalgleichung ist un-
gemein fruchtbar; und wir können nicht umhin, unsere Leser nochmalen zu erin-
nern, daß sie dasjenige, was jeho gesagt werden solle, mehr als einmal überlesen müssen, wenn sie in den folgenden Thei-
len der Mathematik sich einen Fortgang versprechen wollen. Der Ausdruck grün-
det sich auf die Natur der Proportion, und ist also nicht nur ein allgemeiner, son-
dern auch ein wesentlicher Ausdruck. Man wollen wir einen Versuch machen, und wie bey den arithmetischen Proportio-
nen die beede äußerste und die beede mitt-
lere Glieder addiren, damit wir sehen, was heraus kommt. Allein die Sum-
me $a + mb$ und $b + ma$ sind nicht gleich; folglich haben wir durch diese Operation noch nichts gewonnen. Man versuche aber auch die Multiplication: wenn wir die beede äußerste und die beede mittlere Glieder mit einander multipliciren, so ha-
ben wir die Producte amb und bma ; die-
se beede Producte sind nun vollkommen gleich. Folglich werden bey allen geome-
trischen Proportionen die Producte der beeo

beeden äussern und mittlern Glieder einander gleich seyn; weil

$$a : b = ma : mb$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_{amb} = \underbrace{\quad \quad \quad}_{bma}$$

$$amb = bma.$$

Dann was von diesem Ausdruck gesagt werden kann, das wird von allen nur möglichen Proportionen, wenn sie geometrisch sind, gelten. Es ist also eine Eigenschaft aller geometrischen Proportionen, welche darinnen besteht, daß das Product der beeden äussersten Glieder, dem Product der beeden mittlern Glieder gleich seye. Allein darauf kommt es jezo noch an, daß wir untersuchen: ob man diese Eigenschaft statt einer Erklärung der geometrischen Proportion gebrauchen, und sie nicht nur für einen allgemeinen, sondern auch für einen eigenthümlichen Charakter derselben ansehn dürfe? Dann in diesem Fall könnte ich nach den Bestimmungen der Logik sagen: so oft eine solche Eigenschaft sich bey einer Proportion zeigt, so oft ist die Proportion geometrisch. Die Eigenschaft muß aber, wie wir schon gemeldet haben, nicht nur allgemein, sondern auch der gedachten Proportion eigenthümlich seyn. Eine jede geometrische Proportion hat vier Glieder, die beede mittlern mögen hernach einander gleich oder ungleich seyn. Diese

Warum die Eigenschaft der geometrischen Proportionen, daß nemlich die Producte der äussersten und mittlern Glieder einander gleich seyen, statt einer vollkommen logischen Erklärung und Definition der Proportionen dieser Art gebraucht werden könne?

und warum
man dieses
vorzüglich
genau erwei-
sen und be-
stimmen
müsse,

und wie viel
an richtigen
Erklärungen
gelegen seye?

Eigenschaft ist allgemein, aber sie kommt auch den arithmetischen Proportionen zu. Folglich läßt sich noch nichts daraus für die geometrische Proportionen erweisen, weil sie ihnen nicht eigenthümlich ist. Man siehet also schon, wie viel daran gelegen seye, daß man vorher erweise, ein erfundener Charakter sey demjenigen Dinge, dem er zukommt, eigenthümlich, ehe man ihn zu einer Definition macht und weitere Beweise daraus ziehet. Das nöthigste davon habe ich in den Principiis cogitandi P. II. C. I. gesagt, und daselbst angemerkt, daß man entweder zeigen müsse, der Charakter komme sonst keinem andern Dinge zu; oder daß man zu erweisen habe, er fliesse unmittelbar aus dem ganzen Wesen, das ist, nicht aus einzelnen, sondern aus allen wesentlichen Stücken des Dinges zugleich genommen. Beides können wir von der angeführten Eigenschaft der geometrischen Proportionen behaupten. Denn es giebt nur zweyerley Proportionen, nemlich arithmetische und geometrische; indeme alle übrigen, davon wir reden werden, unter diesen Hauptgattungen begriffen sind. Den arithmetischen Proportionen kommt die gefundene Eigenschaft, daß nemlich die Producte der äußersten und mittlern Glieder einander gleich seyen, nicht zu; S. 77. folglich ist sie den geometrischen eigenthümlich. Sie fließ-

Proportionen u. Progressionen 181

fließet ferner aus allen wesentlichen Stufen der geometrischen Proportion: dann weil das zweite Glied aus dem ersten m mal genommen, und das vierte aus dem dritten wieder m mal genommen besteht, so haben die Producte der äussern und mittlern Glieder einerley Factores; wo aber gleiche Factores sind, da sind auch gleiche Producte. Folglich ist die Eigenschaft, daß $a : b = ma : mb$ durch die Multiplication der äussersten und mittleren Glieder zwey gleiche Producte amb und bma gebe, der geometrischen Proportion wesentlich und eigenthümlich, wie es selbst der Augenschein bey den Buchstaben giebt. Die allgemeine Regel für alle geometrische Proportionen wird demnach also heissen: Wenn in einer Proportion die Producte der beeden äussersten und der beeden mittlern Glieder einander gleich sind, so ist die Proportion geometrisch. Ehe ich nun den vorzüglich grossen und allgemeinen Nutzen dieser Regel zeigen kann, muß ich die Leser noch erinnern, daß sie die arithmetische und geometrische Proportionen und ihre beiderseitige Eigenschaften ja nicht mit einander vermengen, sondern was einer jeden eigenthümlich ist, sorgfältig von einander unterscheiden. Große Gelehrte haben sich hierinnen oft geirret, und ihre Schwäche gezeigt. Caspar Schott hat in seiner

Wemels und Wiederholung der Regel für die geometrische Proportionen.

Warum man sich besonders hüthen solle, daß man die Eigenschaften

der arithmes-
rischen und geo-
metrischen
Proportio-
nen nicht
vermenge, und
wie oft groſſe
Meſtkünſtler
ſich hierinnen
geirret haben?

Technica curioſa L. VIII. c. I. ein Exem-
pel von einem ſonſt vollkommenen Meß-
kundigen, deſſen Namen aber verſcho-
net blieb, angeführt, und einen Fehler
entdeckt, der bloß auf der Vermengung
der beederſeitigen von uns angeführten
Eigſchaften beruhet. Wenn man von
gleichem ungleiches ſubtrahirt, ſo werden
die Reſte ſich umgekehrt verhalten wie die
ſubtrahirte ungleiche Stücke; aber nur
arithmetiſch, und ja nicht geometriſch.
Die zwey ungleiche Stücke ſollen m und n
ſeyn, das, wovon ſie abgezogen werden,
ſolle a heißen: ſo wird ſeyn: $(a - m) -$
 $(a - n) = n - m$. Denn wenn man die
beede äußerſte und mittlere Glieder addirt,
ſo kommen gleiche Summen heraus; z. E.
 $a - m + m = a - n + n = a$. weil ſich
 $- m$ und $+ m$ wie auch $- n$ und $+ n$ ge-
gen einander aufheben. Alſo iſt die Pro-
portion arithmetiſch, und nicht geometriſch.
Der ungenannte Gelehrte hingegen hielt
ſie für geometriſch, und baute auf dieſe
irrige Meynung eine ſonſt ſchöne und von
einem nicht gemeinen Wiß zeugende De-
monſtration den Cirkel zu quadriren, wie
man ſie in dem angeführten Buch, wie
auch in des ſel. Herrn Prof. Krafftens In-
ſtitut. Geom. ſublim. nachſehen kann.
Wir haben dieſes Exempel um ſo eher an-
gemerkt, je leichter es iſt, Dinge, die ſo
nahe zuſammen grenzen, mit einander zu
ver-

Proportionen u. Progressionen. 183

vermengen, und je mehr man deswegen nöthig hat, die Liebhaber der Wissenschaften zu genauen, bestimmten, deutlichen und accuraten Ideen durch die Mathematik nach und nach zu gewöhnen.

§. 79. Nunmehr können wir den Nutzen unsrer Regel zeigen. Dann wie man die arithmetische und geometrische Proportionen wenigstens bey uns Deutschen ausdrücke, haben wir schon in der Einleitung gemeldet. Unsere Leser werden sich also noch zu erinnern wissen, daß man jene mit dem Zeichen der Subtraction, z. E. $a - b = c - d$, diese aber mit dem Zeichen der Division, z. E. $a : b = c : d$ schreibt. Die letztere, nemlich die geometrische Proportion, ist, wie wir gehört haben, die fruchtbarste. Wir wollen daher unsere obige Regel auf sie anwenden, und sehen, wie man die Glieder versehen, verändern, und so behandeln könne, daß bey aller Verschiedenheit doch immer noch eine geometrische wahre Proportion übrig bleibt. Die Fundamental-Proportion heißt $a : b = ma : mb$. Nun verändere man diese Gleichung, so oft man will; wenn nur nach geschעהener Veränderung allemal vier Glieder herauskommen, und hernach die Producte der beeden äußersten und der beeden mittlern einander gleich sind, so wird die Proportion geometrisch seyn. Mich dünkt, diese Regel seye für

Von dem mathematischen Ausdruck der Proportionen.

Voran man alle geometrische Proportionen am leichtesten, geschwindesten u. sichersten erkenne, und wie ferne man überhaupt die Glieder versehen dürfe.

Anfänger leichter und faßlicher, als die gewöhnliche, nach welcher man einen auf die Exponenten der Verhältnisse weiset: dann wenn diese einerley oder gleich sind, so ist die Proportion gewiß geometrisch. Allein, wer noch nicht geübt ist, wird die Gleichheit der Producte viel eher noch als die Gleichheit der Exponenten einsehen. Die Exponenten sind oft so versteckt, daß man sie erst durch eine mühsame Division auffuchen muß, da man im Gegentheil die Producte durch die Multiplication im Kopfe leicht berechnen und finden kann. Z. E. $2 : 9 = 4 : 18$, ist eine geometrische Proportion, dann $2 \cdot 18 = 36$ und $4 \cdot 9 = 36$. Dieses sieht man eher, als die Exponenten, welche $4\frac{1}{2}$ und $4\frac{2}{4}$ heißen; dann 2 in 9 ist $4\frac{1}{2}$ mal enthalten, und 4 in 18 ist $4\frac{2}{4}$ mal enthalten; da nun $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, so sind beiderseits die Exponenten $4\frac{1}{2}$, folglich einander gleich. Die letztere Rechnung ist aber schon beschwerlicher als die erste, welcher wir daher den Vorzug lassen, weil man billiger massen alle Regeln so kurz und faßlich vortragen solle, als nur immer möglich ist.

Warum es zuweilen schwer seye, die Exponenten aufzufuchen, und wie deswegen die obige Regel, eine geometrische Proportion zu bestimmen, der sonst üblichen Regel vorzuziehen seye?

Von den Versetzungen und Veränderungen der Glieder.

§. 80. Nun wollen wir die Veränderungen der Fundamentalproportion suchen:

$$I. a : b = ma : mb.$$

$a : ma = b : mb$, hier haben wir die

die beide mittlere Glieder versetzt, dem ungeachtet kommen nach geschehener Multiplication einerley Producte amb und mba heraus; folglich darf man in einer geometrischen Proportion die beide mittlere Glieder versetzen.

Warum man die beide mittlere Glieder versetzen dürfe.

II. $b : a = mb : ma$. Hier wird das erste Glied zum zweiten und das dritte zum vierten gemacht, und die Producte bma und amb sind abermal gleich; folglich ist auch diese Versetzung erlaubt. Aus gleichem Grunde erhellet, daß man auch $b : mb = a : ma$, und $ma : mb = a : b$, und $mb : ma = b : a$, und $mb : b = ma : a$ setzen dürfe.

Warum man das erste Glied zum zweiten, und das dritte zum vierten, und umgekehrt, machen dürfe.

III. $a : b = ma : mb$; nun subtrahire man das zweite Glied vom ersten und das vierte vom dritten, folgender Gestalt, daß das zweite und vierte dennoch bleibe, so hat man $a - b : b = ma - mb : mb$. Auch diese Proportion ist geometrisch, weil die Producte $(a - b)mb$ und $(ma - mb)b$, oder wenn man wirklich multiplicirt, $amb - bmb$ und $mba - mbb$ wirklich einander gleich sind: dann das wollen wir nicht immer wiederholen, daß es gleichgültig seye, wo die Buchstaben oder Factores stehen. Folglich ist auch diese Proportion geometrisch, wenn es heißt, $a - ma : ma = b - mb : mb$, oder $b - a : a = mb - ma : ma$, oder $mb - ma : ma = b - a : a$; dann in allen diesen Fällen kommen durch

Von den Veränderungen durch die Subtraction.

die Multiplication der äussersten und mittleren Glieder gleiche Producte heraus.

Von den Veränderungen durch die Addition.

IV. Wenn ich das zweite Glied zum ersten, und das vierte zum dritten addire, daß das zweite und vierte doch noch in seiner Stelle bleibt, so habe ich $a + b : b = ma + mb : mb$. Auch diese Proportion ist geometrisch: dann die Producte $(a + b)mb$ und $b(ma + mb)$, oder wenn man wirklich multiplicirt $amb + bmb$ und $bma + bmb$ sind wirklich einander gleich. Folglich wird gleichfalls seyn $a + b : ma + mb = b : mb$, und $ma + mb : a + b = mb : b$, und weil $mb : b = ma : a$, oder $\frac{mb}{b} = \frac{ma}{a}$, nach § 9. auch $ma + mb : a + b = ma : a$, u. s. w. Man darf nur sehen, ob allemal gleiche Producte herauskommen.

Von den Veränderungen durch die Multiplication.

V. Nun wollen wir gleiches mit gleichem multipliciren, und die Proportion $a : b = ma : mb$ durch die Multiplication ändern; z. E. $ab : bc = ma : mb$. Daß auch dieser Ausdruck geometrisch seye, zeigen die gleiche Producte $acmb$ und $bcam$ wiederum an. Ferner wird auch aus gleichem Grunde seyn $ac : mac = bc : mbc$, und $ac : mac = b : mb$, und $ac : mac = bd : mbd$, u. s. w. dann alle Producte sind nach der Regel einander gleich. Wie man aber einerley Sachen auf verschiedene Arten beweisen kann, so werden unsere Leser leicht begreifen, daß man auch aus

§. 65.

Proportionen u. Progressionen. 187

S. 65. sowohl diese als die folgende Veränderung demonstrieren könne.

VI. Wenn man die Proportionen durch die Division ändert, so wird man ebenfalls setzen können

gen durch die

Division.

$\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{ma}{c} : \frac{mb}{c}$; dann die Producte $\frac{amb}{cc}$ und $\frac{bma}{cc}$ sind vollkommen

gleich. Aus eben diesem Grunde darf man auch sagen $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = ma : mb$, weil $\frac{amb}{c}$

$= \frac{bma}{c}$, und wiederum $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{ma}{d} :$

$\frac{mb}{d}$ weil $\frac{bma}{cd} = \frac{amb}{cd}$. Ferner $\frac{a}{a} : \frac{b}{a} =$

$1 : \frac{b}{a} = ma : b$, und $\frac{1}{b} : \frac{b}{ab} = \frac{1}{b} : \frac{1}{a}$

$= ma : mb$, weil $\frac{mb}{b} = \frac{ma}{a} = m$; ja

auch $\frac{1}{b} : \frac{1}{a} = \frac{1}{mb} : \frac{1}{ma}$, weil $\frac{1}{bma} =$

$\frac{1}{amb}$, u. s. w.

VII. Eben so geht es mit den Potenzen und Wurzeln; nur müssen in diesem Fall alle vier Glieder zu gleichen Potenzen erhöht, oder zu gleichen Wurzeln erniedrigt, von den Veränderungen durch

Die Erhöhung
der Glieder
zu gleichen
Potenzen,
und durch ih-
re Erniedrig-
ung zu glei-
chen Wurzeln,
welche letztere
Veränderun-
gen besonders
wichtig und
zu fassen
sind.

briget werden. §. E. $a : b = ma : mb$,
folglich $a^2 : b^2 = m^2 a^2 : m^2 b^2$, oder
überhaupt $a^n : b^n = m^n a^n : m^n b^n$, weil
 $a^n m^n b^n = b^n m^n a^n$. Hier lassen sich nun
alle Ausdrücke von Reg. I—V. wieder
anbringen: denn ich kann auch setzen

$a^n + b^n : b^n = m^n a^n + m^n b^n : m^n b^n$ u. f.
Einen wollen wir besonders merken, nem-
lich den Ausdruck der Division; ich kann

sagen $\frac{1}{b^n} : \frac{1}{a^n} = \frac{1}{m^n b^n} : \frac{1}{m^n a^n}$; dieser aber
wird nach §. 59. kürzer und schicklicher
ausgedrückt, wenn man schreibt: $b^{-n} : a^{-n}$
 $= m^{-n} b^{-n} : m^{-n} a^{-n}$, und weil die Pro-
portion noch bleibt, wenn ich nach Reg V.
nur die eine Verhältniß dividire, so darf
ich auch sagen $\frac{1}{b^n} : \frac{1}{a^n} = m^n a^n : m^n b^n$;

oder kürzer: $b^{-n} : a^{-n} = m^n a^n : m^n b^n$,
dann die Producte $\frac{m^n a^n}{a^n}$ und $\frac{m^n b^n}{b^n}$ sind

beiderseits gleich, nemlich m^n . Mit den
Wurzeln verfährt man auf gleiche Weise:
denn es ist

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ma} : \sqrt[n]{mb}$, nicht aber

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = ma : mb$. Im ersten Falle nur
sind die Producte der äussern und mitt-
leren Glieder gleich, im letztern hin-
gegen

Proportionen u. Progressionen. 189

gegen nicht, wie man sogleich augenscheinlich sehen kann: dann die erste Proportion

heißt nach §. 58. $a^n : b^n = m^n a^n : m^n b^n$,

da dann die Producte $a^n m^n b^n$ und $b^n m^n a^n$ vollkommen gleich sind. Im letztern Fall

aber wären die Producte $b^n m a$ und $a^n m b$, welche offenbar ungleich sind; folglich kann

die Proportion $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = m a : m b$, oder

nach §. 58. $a^n : b^n = m a : m b$, nimmermehr statt finden.

Ausser diesen einfachen Hauptfällen giebt es noch einige zusammengesetzte, welche zu wissen nöthig sind, und die wir daher nur kürzlich anzeigen wollen.

Wenn zwei Proportionen mit einander so übereinkommen, daß zwei Verhältnisse davon einer und eben derselben dritten Verhältniß gleich sind, so kommt auf eine dreifache Weise die dritte Proportion heraus. Denn I. entweder sind die zwey erste paar Glieder, oder welches nach den Versetzungen gleichviel ist, die zwey letzte paar Glieder einander gleich; II. oder es ist das erste und dritte, oder zweyte und vierte paar Glieder, oder auch nach den Versetzungen das erste in der einen dem zweyten in der andern, und das dritte in der einen dem vierten in der andern Proportion

portion gleich; II. oder endlich ist das erste und letzte paar, oder das zweite und dritte paar Glieder, oder das erste paar in der einen dem zweiten in der andern, und das dritte in der andern dem vierten in der ersten Proportion gleich. Im ersten Fall schließt man ex æquo, überhaupt; im zweiten ordinatim; im dritten perturbate.

Die folgende Exempel, die man sich wohl bekannt machen muß, werden das gesagte erläutern, woder Beweis in Buchstaben dabey steht.

I. Fall: ex æquo simpliciter.

$$a : ma = b : mb \quad 4 : 8 = 3 : 6$$

$$a : ma = c : mc \quad 4 : 8 = 5 : 10$$

$$\hline b : mb = c : mc \quad 3 : 6 = 5 : 10$$

II. Ordinatim ex æquo.

$$1) a : ma = b : mb \quad 4 : 12 = 2 : 6$$

$$\begin{array}{c} | \qquad \qquad | \\ mna : ma = mnb : mb \end{array} \quad 10 : 12 = 5 : 6$$

$$\hline a : mna = b : mnb. \quad 4 : 10 = 2 : 5$$

$$2) a : ma = b : mb \quad 5 : 15 = 2 : 6$$

$$\begin{array}{c} \diagdown \qquad \diagdown \\ ma : mna = mb : mnb \end{array} \quad 15 : 30 = 6 : 12$$

$$\hline a : mna = b : mnb. \quad 5 : 30 = 2 : 12$$

III. Perturbate ex æquo.

$$1) a : ma = b : mb \quad 4 : 2 = 12 : 6$$

$$\begin{array}{c} | \qquad \qquad | \\ mna : ma = b : \frac{b}{n} \end{array} \quad 8 : 2 = 12 : 3$$

$$\hline a : mna = \frac{b}{n} : mb. \quad 4 : 8 = 3 : 6.$$

2)

Proportionen u. Progressionen. 191

$$2) a : ma = b : mb$$

$$4 : 2 = 12 : 6$$

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ ma : mna = \frac{b}{n} : b \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 2 : 8 = 3 : 12 \end{array}$$

$$\frac{a : mna = \frac{b}{n} : mb}{a : mna = \frac{b}{n} : mb}$$

$$4 : 8 = 3 : 6.$$

Wenn man ganz verschiedene geometrische Proportionen miteinander multiplirt oder dividirt; so kommen wiederum geometrische Proportionen heraus, worinnen nur immer gleichnamigte Glieder bey den vier Rechnungsarten verbunden werden.

Es sey gegeben $a : ma = b : mb$ $5 : 10 = 2 : 4$

$c : nc = g : ng$ $3 : 6 = 4 : 8$

I. Multipl. $ac : mnac = bg : mnb$ $15 : 60 = 8 : 32$

II. Dividirt $\frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{b}{g} : \frac{mb}{ng}$ $\frac{5}{3} : \frac{10}{6} = \frac{2}{4} : \frac{4}{8}$

Wenn die Proportionen einerley Verhältniß haben; so wird noch eine Proportion herauskommen, wenn man die gleichnamige Glieder addirt oder subtrahirt;

Dann $a : ma = b : mb$

$c : mc = d : md$

_____ giebt

$$a + c : m(a + c) = b + d : m(b + d)$$

$$2 : 4 = 3 : 6$$

$$5 : 10 = 1 : 2$$

$$7 : 14 = 4 : 8.$$

Ist aber die Verhältniß verschieden, so geht die Addition und Subtraction nicht an; die Multiplication und Division hingegen ist in allen Fällen richtig.

Wenn

Wenn bey Proportionen, die in einander multiplicirt werden, zwey nicht homologe Glieder gleich sind: so verhält sich das Product des ersten Paares Glieder zum Product des andern Paares, wie das dritte Glied der ersten zum vierten Glied der andern Proportion.

Es seye $T : t = E : v$

$C : c = v : e$

$CT : tc = Ev : ev$ so ist

$----- : v$

$CT : tc = E : e$.

Gesezt nun E und e bedeuten Wirkungen, C und c Ursachen, T und t Zeiten, in welchen die Wirkungen hervorgebracht werden; so werden sich die Wirkungen wie die Producte aus den Zeiten in die Ursachen verhalten: denn wenn die Zeiten gleich sind, so verhalten sich die Wirkungen wie die Ursachen; und wenn die Ursachen gleich sind, wie die Zeiten.

Wenn drey oder mehrere Proportionen ein so gemeinschaftliches Glied haben; so werden die Producte aller ersten Glieder zu den Producten aller zweyten Glieder sich verhalten, wie das dritte Glied der ersten Proportion zum vierten der letzten Proportion.

$a : b = g : h$

$c : d = h : q$

$e : f = q : r$

$ace : bdf = ghq : hqr$

$----- : hq$

$ace : bdf = g : r$.

Diese

Diese Proportion heißt man sonst die Kettenregel, wie die unmittelbar vorhergehende die Regel Quinque. Sie dienen, besonders die Kettenregel, dazu, daß man einen Begriff von den zusammengesetzten Verhältnissen bekomme, z. E. 3 ist in 12 viermal, und 12 in 60 fünfmal enthalten; folglich ist die Verhältniß von 3 zu 60 aus der Verhältniß von 3 zu 12 und 12 zu 60 zusammengesetzt, das ist, 3 steckt in 60 viermal fünfmal, oder zwanzigmal. Das bisher vorgetragene muß man sich vorzüglich bekannt machen, weil die Lehre von den Proportionen, wie wir schon gemeldet, die Seele der ganzen Mathematik ist.

J. 81. Die bisherige Vorbereitungen werden uns nun das folgende, das man-
 chem so schwer scheint, erleichtern, und
 die ganze Lehren von der so genannten Re-
 gel Detri und andern Regeln auf wenig
 Blättern faßlich machen. Dann es ist
 uns nichts mehr übrig, als daß wir ze-
 gen, wie man in einer geometrischen Pro-
 portion das vierte Glied finden solle. Diese
 Erfindung wird uns zugleich den Weg zu
 den Eigenschaften der continuirlich, geome-
 trischen Proportionen und sodann auch der
 Progressionen bahnen. Aus dem vorher-
 gehenden ist klar, daß die Producte der be-
 den äußersten und mittleren Glieder in ei-
 ner wahren geometrischen Proportion ein-
 ander

tung zur
 Regel Detri,
 wie man das
 vierte Glied
 in einer geo-
 metrischen
 Proportion
 suche,

und durch
was für
Buchstaben
die unbe-
kannte oder
gesuchte
Größen an-
gezeigt wer-
den?

ander gleich seyn müssen. Da man nun das vierte Glied erst finden solle, so wollen wir es x oder y nennen, durch welche Buchstaben ohnehin dasjenige, was noch unbekannt ist, und erst erfunden werden solle, nach der Gewohnheit der Algebraisten ausgedrückt wird; und weil die drei ersten Glieder, nemlich a , ma , und b gegeben sind, so setzen wir nur

$a:ma=b:x$, und multipliciren nach §. 79. $ax=ma$, hernach dividiren

$$\frac{ax}{a} = \frac{ma}{a}; \text{ a wir beiderseits mit } a, \text{ damit wir die unbekannte Grö-}$$

ße allein bekommen:

Nunmehr wissen wir, wie das vierte Glied heisset, nemlich $\frac{mab}{a}$ oder mb , weil $\frac{a}{a}$

$= 1$, und folglich in dem Ausdruck $\frac{mab}{a}$

hinweg fällt. Das vierte Glied wird also gefunden, wenn man das zweyte und dritte Glied miteinander multiplircirt, und das Product durch das erste Glied dividirt. Es ist zugleich ohne unser Erinnern klar, daß nach eben dieser Regel das erste, oder das zweyte, oder das dritte Glied gefunden werden könne. Dann die Proportionen darf man nach §. 80. ver-
setzen; daher es gleichviel ist, ob ich sage:

$$x:b=ma:a \text{ oder}$$

$$b:x=a:ma \text{ oder}$$

$$ma:a=x:b;$$

Man

Warum ver-
jenige, der
das vierte
Glied finden
kann, auch
eben deswe-
gen das erste,
zweyte oder
dritte finden
könne, und
wie man des-
wegen nicht

Proportionen u. Progressionen. 195

Man kann also jedesmal das unbekannte ^{Ursach habe,} Glied zum vierten und letzten machen, da ^{von der gewöhnlichen} hero wir in der längstens angenommenen ^{Regel abzu-} allgemeinen Regel mit Fleiß nichts ändern ^{gehen.} wollten. Dieser Satz ist das Fundament der ganzen Regel Detri, und aller damit verbundenen Nebenregeln. Ebenso kann ich das letzte Glied in einer continuirlichen Proportion finden, wenn ich setze:

$$a : ma = ma : x \quad \text{folglich}$$

$$\underline{ax = m^2 a^2} \quad \text{und}$$

$$x = \frac{m^2 a^2}{a} = m^2 a.$$

Denn, weil das zweite und dritte Glied ^{Wie man} in dieser Proportion einerley ist, so darf ^{das letzte} ich es nur doppelt setzen, und die Rechnung ^{Glied in ei-} auf die obige Regel reduciren, da ich so ^{ner conti-} gleich finden werde, wie das letzte Glied ^{nirlich geo-} aussehen müsse; es heißt nemlich $m^2 a$; ^{metrischen} wenn ich also das mittlere in diesem Fall ^{Proportion,} erst finden müßte, und das erste und letzte, ^{und wie man} nemlich a und $m^2 a$ wären mir gegeben, so ^{das mittlere} setze ich abermal nach meiner Regel: ^{Glied finde?}

$$a : x = x : m^2 a, \quad \text{folglich}$$

$$\underline{m^2 a^2 = x^2} \quad \text{und durch Ausjes}$$

hung der Quadrat-
wurzel in bloßen
Zeichen S. 58.

$$\sqrt{m^2 a^2} = \sqrt{x^2} \quad \text{das ist}$$

$$m^{\frac{2}{2}} a^{\frac{2}{2}} = x^{\frac{2}{2}} \quad \text{oder}$$

$$a = x,$$

Da

Das

Erläuterung
in Zahlen.

Das zweite oder mittlere Glied heißt demnach *ma*; welches abermal nach Anleitung der allgemeinen Regel gefunden worden ist. Zur Erläuterung wollen wir einige Exempel in Zahlen geben. Man solle zu 3, 6, und 4 die vierte Proportionalzahl finden, nach der Regel schreibt man also:

$$3 : 6 = 4 : x$$

$$3 \cdot x = 4 \cdot 6.$$

$$\text{-----} : 3$$

$$x = \frac{4 \cdot 6}{3} = \frac{24}{3} = 8.$$

Demnach ist 8 die vierte Proportionalzahl. Die Probe ist leicht zu machen: 3 ist in 6 enthalten 2mal, und 4 in 8 ist auch zweymal enthalten; oder $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. Ferner, wenn ich zu 3 und 6 die dritte Proportionalzahl suchen will, so schreibe ich:

$$3 : 6 = 6 : x$$

$$3 \cdot x = 6 \cdot 6$$

$$\text{-----} : 3$$

$$x = \frac{6 \cdot 6}{3} = 12.$$

Also ist 12 die dritte Proportionalzahl zu 3 und 6, dann $3 : 6 = 6 : 12$. Verlange ich endlich zwischen 3 und 12 das mittlere Glied, so ist

$$3 : x = x : 12 \text{ folglich}$$

$$3 \cdot 12 = x^2 \quad \text{und}$$

$$\sqrt{3 \cdot 12} = x.$$

Well

Weil wir nun noch nicht gezeigt haben, wie man die Wurzeln in Zahlen wirklich ausziehe, so lassen wir es diesmal bey dem bloßen Zeichen bewenden; unerachtet man im Kopf bey dem gegenwärtigen Exempel leicht ausrechnen kann, was die Wurzel seye, dann $\sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$.

§. 82. Wenn man die allgemeine Regel §. 81. auf genannte Zahlen anwendet, und z. E. fraget: 3 Ehlen Tuch kosten 6 fl. was kosten 4 Ehlen von dem nemlichen Tuch? so heißt diese Anwendung die Regel Detri. Nun begreift man leicht, daß es eine Menge von Fällen geben muß, worinnen man diese Rechnung nöthig hat; daher man sich gar nicht wundern darf, wenn man oft ganze Bücher zu sehen bekommt, welche blos von der Regel Detri handeln. Wir werden sie aber nach unserer gegenwärtigen Absicht um so kürzer vortragen dürfen, je weniger wir gesonnen sind, das praktische in dergleichen Materien umständlich auszuführen. Eines kann ich nicht ganz übergehen. Der Reesische Name ist in dieser Rechnung so bekannt geworden, daß es ein Fehler seyn könnte, wenn ich ihn nicht nennen würde. Man hat die Regel Detri nach der schon vorgetragenen Regel §. 81. so lange abgehandelt, bis endlich die so beliebte Reesische Art, die gegebene und gesuchte Zahlen zu setzen, aufgetommen, und von ihrem Erfinder, dem Herrn von Rees, einem

Was die Regel Detri insgemein heiße,

und warum sie so einen weitläufigen Umfang habe, und nichts desto weniger von uns so kurz und doch vollständig vorgetragen werden könne.

Was die sogenannte Reesische Regel seye;

Allgemeiner
Beweis der
Reeffischen
Regel, was
die Art die
Zahlen zu se-
zen betrifft.

Holländer, den Namen bisher beibehalten hat. Nach derselben schreibt man die Glieder der Proportion so, daß die Factores der zwey gleichen Producte durch einen Vertical-Strich von einander getrennet werden. Z. E.

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ mb & ma \text{ oder} \\ \hline amb & bma \end{array} \quad \begin{array}{c|c} a & b \\ x & ma \\ \hline ax & mab \end{array}$$

Nun siehet jedermann, daß es ganz gleichgültig ist, ob ich die Glieder nach der gewöhnlichen oder nach der Reeffischen Methode setze; dann in einem wie in dem andern Fall müssen gleiche Producte herauskommen, und das ist nun der Beweis für die Reeffische Rechnung. Man begreift aber wohl, daß wegen den mannigfaltigen und oft sehr in einander geflochtenen Exempeln viele Sorgfalt und Aufmerksamkeit nöthig seye, damit man die Factores nicht verseze, und was auf die eine Seite gehört, mit der andern nicht verwechsle. Diesen Fehler nun zu vermeiden, hat man je und je verschiedene neue Setzungsregeln ausgedacht, welche aber oft mehr Ausnahmen leiden, als die grammatische Regeln. Die Hauptsache bestehet darinnen, daß man nach den Proportionsregeln §. 79. 80. handeln, und durch die Uebung so wohl als durch ein geschärftes Nachsinnen alle Glieder, die miteinander multiplicirt werden müssen, sich bekannt mache. Wir

Warum die Anwendung der Reeffischen Regel in manchen Fällen noch schwer seye, und den Anfängern oft durch Nebenregeln erleichtert werden müsse.

Proportionen u. Progressionen, 199

werden das weitere hievon melden, wenn wir vorhero noch einen andern Fall bey der Reeffischen Rechnung bewiesen haben. Es können nemlich die Glieder einer Verhältniß auch Brüche seyn, in welchem Fall die Reeffische Regel haben will: man solle auf jeder Seite die Nenner austreichen, und selbige hernach als ganze Zahlen der gegenüber stehenden Seite zugeben, und sodann nach der ersten Regel nur Zehler und ganze Zahlen multipliciren. Der Beweis davon ist leicht zu verstehen: Es seye die Proportion,

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{f} = \frac{g}{h} : x$$

Beweis der
Reeffischen
Regel in
Rucksicht auf
die Brüche,

so hat man nach der gewöhnlichen Manier und Versetzung ihrer

$$\frac{a}{c} \cdot x = \frac{bg}{fh} \text{ und}$$

$$x = \frac{bg}{fh} : \frac{a}{c} = \frac{bg}{fh} \cdot \frac{c}{a} = \frac{bgc}{fha} \text{ §. 71.}$$

Nenner.

folglich ist $x = \frac{bgc}{fha}$, und wenn man

beederseits mit fha multiplicirt,

$$xfha = bgc.$$

Nach der Reeffischen Methode kommt gleiches heraus: dann man schreibt

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline f & f \\ \hline c & g \\ \hline x & h \\ \hline h & h \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{und setzt die ausge-} \\ \text{strichene Nenner} \\ \text{wechselsweis auf die} \\ \text{andere Seite, mul-} \\ \text{tiplicirt sodann und} \end{array}$$

bekommt $afh x | b c g.$

Da nun, wie wir erwiesen, $afh x = b c g$,
so ist, wie oben, $x = \frac{bcg}{afh}$. Nun ist al-

les bewiesen, was nur immer in der Rees-
fischen Regel zu beweisen war. Der
Grund von der letzten Veränderung beru-
het darauf: daß die Division der Brü-
che in eine Multiplication des zu dividiren-
den Bruchs mit dem umgekehrten Divi-
sor, verandelt wird, welche gerade durch
das Ausstreichen und Versetzen der Nenn-
er sich bewerkstelligen läßt.

§. 83. Jetzt ist noch übrig, daß wir
unseren Lesern auch Exempel geben, und
die Anwendung dieser Regel zeigen. Zus-
vor muß ich aber einen sehr fruchtbaren
und allgemeinen Satz noch anführen, wel-
chen der in den mathematischen Wissen-
schaften wohl bewanderte und gelehrte Herr
Pastor Glattich ohnelängst an mich über-
schrieben hat: Er heißt mit einer kleinen
Veränderung also: Alle Theile einer
Größe, wodurch die Größe bestimmt
und determinirt wird, werden in der
Regel ~~Derri~~ nach der Reesfischen Me-
thode mit einander multiplicirt, oder
auf einer Seite den bestimmten Grö-
ßen gegenüber gesetzt. Wer diesen Satz
verstehet, der wird ohne viele Mühe so-
gleich wissen, wie er die Zahlen setzen solle.
Wir wollen ihn zuerst erklären, hernach
beweisen. Die Größe des Zinses aus ei-
nem

Eine höchst-
brauchbare
Regel, durch
deren Beob-
achtung
Glieder nach
der Reesfischen
Methode je-
desmal rich-
tig gesetzt wer-
den können.

nem Capital wird durch die Größe des Exempel zur Capitals und durch die Länge der Zeit, Erläuterung wie lang ichs nemlich ausleihe, bestimmt und determinirt. Wenn also 600 fl. in 6 Jahren 50 fl. Zins oder Interesse eintragen, so frage ich, wie viel Interesse tragen 1600 fl. in 4 Jahren? Weil ich weiß was beiderseits für Größen theils gegeben theils gesucht werden, so darf ich nur die bestimmende Theile dieser Größen so setzen, daß sie ihren Größen gegenüber stehen, und sodann unter die zwen gleiche Producte geben: z. E.

$$\begin{array}{l|l} 600 \text{ fl.} & 50 \text{ fl. Zins} \\ 6 \text{ Jahr} & 1600 \text{ fl.} \\ \times \text{ Zins} & 4 \text{ Jahr} \end{array}$$

$$6.600. \times | 4.50.1600.$$

folglich ist $x = \frac{4.50.1600.}{6.600.}$

$$6.600.$$

Eben so wird die Arbeit der Menschen, z. II. Exempel E. ein Schloßbau oder eine Schanze, bestimmt durch die Zahl der Arbeiter und durch die Länge der Zeit, welche sie auf die Arbeit wenden: Wenn also 200 Soldaten ein Lager innerhalb 24 Tagen zum Nothwehr bevestigen, wie viel braucht man Soldaten, wenn die Arbeit innerhalb 6 Tagen fertig werden solle? Ich setze hier wiederum

$$\begin{array}{l|l} 200 \text{ Soldaten} & 1 \text{ Schanze} \\ 24 \text{ Tag} & x \text{ Soldaten} \\ 1 \text{ Schanze} & 6 \text{ Tagen} \end{array}$$

$$200. 24 = 6. x$$

folglich $200. 24 = x \text{ Soldaten.}$

welche man
aber bey die-
ser Methode
gar nicht nö-
thig hat.

Aus diesem Exempel siehet man, daß man keine umgekehrte Regel Detri (regulam trium inversam,) nöthig hat; indeme die ganze Rechnung nach der allgemeinen Regel sich richtet, wenn man nur genau auf alles dasjenige Achtung giebt, was zur wirklichen Bestimmung einer Grösse, oder hier zur Vollendung einer Arbeit, für Theile und Umstände nöthig sind.

Noch einige
andere
Exempel,

Eben so antwortet man auf die Frage: wenn acht Personen, deren jegliche täglich drey Quart Wein trinken, innerhalb 28 Tagen ein Faß Wein austrinken; wie bald wird das Faß leer werden, wenn täglich 12 Personen daraus trinken, und jegliche 2 Quart trinket? Die Ausleerung des Fasses wird bestimmt durch die Anzahl der Trinker, durch den täglichen Trank eines jeden, und durch die Anzahl der Tage, wie lang sie trinken; diese sämtliche Theile bestimmen die Grösse, daher werden sie mit einander multiplicirt und nach der Reesfischen Methode folgender massen gesetzt:

$$\left\{ \begin{array}{l} 8 \text{ Person.} \\ 3 \text{ Quart.} \\ 28 \text{ Tag.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ausgeleer=} \\ \text{tes Faß,} \\ 12 \text{ Person.} \\ 2 \text{ Quart.} \\ \text{ausgeleer,} \\ \text{tes Faß.} \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ x \text{ Tagen.} \end{array}$$

$$8.3.28 = | 12.2.x \text{ folglich}$$

$$8.3.28$$

$$\text{————} = x. \text{ Tagen.}$$

$$12.2$$

Die

Proportionen u. Progressionen. 203

Die Exempel mit Brüchen werden eben so besonders behandelt: wenn z. E. 8 Ehlen $\frac{6}{4}$ breit Tuch auch mit ein Kleid geben; so fragt sich, wie viel Brücken man Ehlen brauche, wenn das Tuch nur $\frac{5}{4}$ breit ist? Es ist klar, daß das Kleid durch die Länge und Breite des Tuchs bestimmt wird; darum multiplicirt man diese Theile miteinander und setzt

$$\left\{ \begin{array}{l|l} 8 \text{ Ehlen lang} & 1 \text{ Kleid. } 4. \\ \frac{6}{4} \text{ breit.} & x \text{ Ehlen} \\ 4, 1 \text{ Kleid.} & \frac{5}{4} \text{ breit} \end{array} \right\}$$

$$8.6.4 = 5.4.x. \text{ folglich } \frac{8.6.4.}{5.4.} = x \text{ Ehlen.}$$

§. 84. Man bringt aber auch die so genannte welsche Practik dabey an, welche weiter nichts ist, als die Kunst, ein Verhältniß kürzer auszudrucken. Die meisten geben hier wiederum besondere Regeln, welche man vor der wirklichen Multiplication noch beobachten soll. Allein da wir die Multiplication durch Zeichen nur anzeigen, so ist es weit schicklicher, daß man diese Verkürzung erst am Ende der Rechnung anbringt, weil man hierzu keine weitere Regeln nöthig hat, und die ganze Arbeit nur auf das, was wir §. 66. gesagt haben, reduciren darf. Z. E. in der letzten Aufgab habe ich

$$x = \frac{8.6.4.}{5.4.} \text{ das ist, weil } 4 \text{ in } 4 \text{ ein-}$$

mal enthalten ist, folglich gegen einander auf

Wie man die welsche Practik anbringe, und warum man sie am besten zuletzt nach geschähe- ner Be- rechnung, die aber nur durch Zeichen ausgedruckt wird, anbrin- gen könne?

aufgehoben wird, $x = \frac{8.6}{5}$. Auf gleiche Weise verfähret man bey andern Exempeln; nur muß man immer die Hauptregel befolgen, daß man nemlich alle zugleich bestimmende Theile einer Gröſſe untereinander auf eben derselben Seite ſetzt u. ſ. w. Die übliche Reesſiſche Regel heißt zwar also: Man ſetze die gegebene Zahlen ſo, daß auf beyden Seiten gleiche Namen zu ſtehen kommen. Allein es giebt Exempel, woben nicht allemal zween gleiche Namen vorkommen: folglich würde die Regel in dieſem Fall ſchon eine Ausnahme leiden. Unſere obige erſte Regel hingegen iſt dieſer Gefahr nicht ausgeſetzt. Der Beweis davon iſt übrigens faßlich genug: dann die bestimmende Theile ſind allemal der ganzen Gröſſe proportionell; folglich müſſen ſie auf der gegenüber ſtehenden Seite zuſammen geſetzt werden. Weil nun kraft der Natur der Regel Detri die äußere und mittlere Glieder miteinander multiplicirt werden, ſo iſt klar, daß auch dieſe bestimmende und determinirende Theile, jegliche auf der ihnen angewieſenen Seite, multiplicirt werden müſſen. Die herauskommende zween gleiche Producte werden hernach ſo behandelt, daß die bekannte Factores desjenigen Products, in welchem das x enthalten iſt, das andere Product dividiren, damit man x allein bekomme. §. 9. Nun iſt

Vortheile
der obigen
Regel, die
Glieder zu ſet-
zen, nebst ih-
rem Beweis.

ist alles gesagt, was zur Regel Detri ge-
 hört. Dann daß man, wo ungleiche Be-
 nennungen z. E. Gulden und Kreuzer vor-
 kommen, alles vorher unter einerley Be-
 nennung bringen müsse, werden unsere Le-
 ser sich leicht vorstellen können, wenn sie
 das zweyte Capitel von den vier Rechnungs-
 arten gelesen haben. Eben so wil ich auch
 nicht erst erinnern, daß man bey Gesell-
 schäfts-Gewinn- und Verlustrechnungen u.
 s. w. die Regel Detri etlichmal anbringen
 müsse; man mag die Reesische oder eine an-
 dere Methode sich bekannt gemacht haben.
 Denn wenn z. E. 3 Personen mit 1800 fl.
 2000 fl. gewonnen haben, und die erste
 1000, die andere 500, die dritte 300 einge-
 legt hatte, so heißt es eben: 1800 fl. gewinnen
 2000, wie viel gewinnen die eingelegte
 tausend der ersten Person? ferner 1800 ge-
 winnen 2000, wie viel gewinnen die einge-
 legte 500 fl. der zweyten Person? und end-
 lich 1800 fl. gewinnen 2000 fl. wie viel ge-
 winnen die eingelegte 300 fl. der dritten
 Person daran? u. s. w. Was endlich die
 Brüche betrifft, so werden am Beschluß der
 Rechnung auch diese in die gewöhnliche
 Zahlnamen verwandelt. Man sagt z. E. bey
 uns nicht $\frac{3}{4}$ fl, sondern 45 kr. wenn also
 ein solcher Ausdruck vorkommt, so muß
 man ihn in einen andern verwandeln, der
 in dem Lande, wo man lebt, üblich ist.
 Das geschieht nun durch die Regel De-
 tri;

Einige Re-
 benumstände

der Regel

Detri, der

Gesellschafts-

Verlust- und

Gewinnrech-

nung u. s. w.

werden kurz-

lich berührt.

Wie man die
am Ende der
Rechnung
zuweilen an-
gehängte
Brüche un-
ter andere
Benennun-
gen bringe,
und z. E.
die Brüche der
Gulden in
Kreuzer ver-
wandle.

tri; dann der Ausdruck $\frac{3}{4}$ fl. muß allemal
dem Ausdruck $\frac{x}{60}$ fl. gleich seyn, weil 60 fr.

einen Gulden ausmachen. Es kommt also
nur darauf an, daß wir x oder den Zehler
zu dem Nenner 60 finden. Das ist

nun bald geschehen; dann $\frac{3}{4}$ fl. = $\frac{x}{60}$ folg.

lich $4 : 3 = 60 : x$ und also $x = \frac{3 \cdot 60}{4}$;

oder wenn wir für 3 den Buchstaben a und
für 4 den Buchstaben b setzen, so wird in
allen solchen Fällen herauskommen $\frac{a}{b}$ fl. =

$\frac{x}{60}$, oder $b : a = 60 : x$, und $x = \frac{60 \cdot a}{b}$.

Die allgemeine Regel wird also die folgende
seyn: man multiplicirt den Zehler eines sol-
chen Bruchs mit 60, und dividirt das
Product mit dem Nenner, der Quotient
wird Kreuzer geben. Wenn man im Früch-
tenmaas für 60 sezet 8, weil 8 Simri bey
uns auf einen Scheffel gehen, oder im Wein-
maas 16, weil 16 Inri einen Anmer machen,
u. s. w. so wird die Regel noch allgemei-
ner werden können. Wir haben von der
Regel Detri fast mehr gesagt, als wir an-
fänglich gesonnen waren. Wer aber dem
ungeachtet doch noch weitere Anwendungen
und Exempel verlangen sollte, der wird sie
in des gelehrten Hrn. Pastor Engelhards
ohne

ohne längst herausgegebenen Rechenkunst nach der Rees'schen Regel, umständlich finden.

§. 85. Wann mehrere continuirliche Proportionen also zusammen gesetzt werden, daß sich das erste Glied zum zweiten verhält, wie das zweite zum dritten, und das zweite zum dritten, wie das dritte zum vierten, und das dritte zum vierten, wie das vierte zum fünften, u. s. w. so entsteht eine Progression, welche entweder geometrisch oder arithmetisch ist, je nachdem die Verhältniß der Glieder geometrisch oder arithmetisch ist. Die geometrische wollen wir zuerst betrachten, weil sie gemeinnütziger und in der Hauptsache auch nicht schwerer sind, als die arithmetische. Nun kann eine geometrische Proportion entweder immer steigen, oder immer abnehmen; im ersten Fall heißt sie eine divergirende, im zweiten eine convergirende Progression. Wie ferne man etwas ähnliches bey den arithmetischen Progressionen beobachten könne, werden wir im folgenden zeigen. Eine geometrische Progression ist demnach a, ma, m^2a, m^3a, m^4a u. s. w. Denn $a : ma = ma : m^2a$, und $ma : m^2a = m^2a : m^3a$, und $m^2a : m^3a = m^3a : m^4a$, wie man aus der §. 81. festgesetzten Regel leicht ersehen wird. Dieser allgemeine Ausdruck läßt sich nun auf allerhand Exempel in Zahlen anwenden: denn wenn $a = 1$ und $m = 2$,

Was Progressionen seyen, und wie sie eingetheilt werden,

Allgemeiner Ausdruck für die geometrischen Proportionen,

wird durch Exempel in Zahlen erläutert,

so wird die Progression heißen :

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 u. s. w.

Ist $m = 3$, so heißt die Progression

1, 3, 9, 27, 81, 243, u. s. w.

Eigenschaften
ten der geo-
metrischen
Progressio-
nen.

Wenn $m = \frac{1}{2}$ so giebt es folgende Progression : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ u. s. w. Nun kann man aus dem bloßen Anschauen dieser Progressionen mit Vergleichung der Proportionsregeln bald auf eine Eigenschaft schließen, welche eine von den ersten ist, die man sich in dieser Materie bekannt machen muß. Wir wollen setzen: die Progression gehe mit dem fünften Glied aus; in welchem Fall sie also aussehet :

a, ma, m^2a, m^3a, m^4a ;

Wenn ich nun das erste und letzte Glied mit einander multiplicire, so bekomme ich das Product m^4a^2 ; multiplicire ich das zweite und uneins letzte, nemlich ma mit m^3a , so bekomme ich wieder m^4a^2 ; multiplicire ich das dritte von vornen, und das dritte von hinten an gerechnet, das ist, im gegenwärtigen Fall, das mittlere mit sich selbst, so bekomme ich noch einmal m^4a^2 ; ich mache daher den richtigen Schluß, daß in einer geometrischen Progression die Producte der beeden äußersten Glieder, und die Producte aller von den äußersten beederseits gleich weit abstehenden Glieder einander gleich seyen; folglich wenn die Anzahl der Glieder ungleich z. E. 5, 7, 9, 11 u. s. w. ist,

so

Die Products
te der äußer-
sten und
von den äußer-
sten beiderseits
gleich weit
abstehenden

Proportionen u. Progressionen. 209

so wird das Quadrat des mittelsten Gliedes ^{Glieder sind} allemal ^{einander gleich.} dem Product der beeden äussersten u. s. w. gleich seyn. Die Probe kann man leicht in Zahlen machen. Z. E.

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 4, & 8, & 16 \\ & & \frac{4}{16} & \frac{8}{16} & \frac{16}{16} \end{array}$$

Eben so sehe ich in meiner obigen Progression, daß die letzte Dignität von m allemal um eins weniger ist, als die Anzahl der Glieder; die Progression hat 5 Glieder, und der Exponent von m im letzten Glied ist 4; er wäre 5, wenn die Progression 6 Glieder hätte, und 6, wenn sie sieben hätte, denn man darf nur fortfahren und schreiben

$$a, ma, m^2a, m^3a, m^4a, m^5a, m^6a,$$

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Folglich kann ich wiederum einen allgemeinen Ausdruck für die geometrische Progressionen finden, wenn ich die Zahl der Glieder n nenne. Dann in diesem Fall wird das letzte Glied allemal seyn $m^{n-1}a$, und das unelns letzte $m^{n-2}a$, das dritte von hinten $m^{n-3}a$ u. s. w. Dahero wird die obige Progression, wenn ich sie umgekehrt schreibe, folgende Gestalt bekommen:

$$m^{n-1}a, m^{n-2}a, m^{n-3}a, m^{n-4}a, m^{n-5}a,$$

$$m^{n-6}a \text{ u. s. w.}$$

Wenn einem also die Anzahl der Glieder und der Exponent m gegeben wird, so läßt sich, wofern a immer $= 1$, das letzte Glied ohne Mühe finden. Dann die Anzahl der Glieder $= n$ solle 5 und $m = 2$ seyn, so

Noch ein allgemeinerer Ausdruck für die geometrische Progressionen wird angeführt und erwiesen.

Wie man das letzte Glied einer geometrischen Progression finde;

ist das letzte Glied $= m^{n-1}a = 25-1 = 24 = 16$.

§. 86. Nunmehr können wir eben diejenige Aufgaben vollends finden, welche wir in der Lehre von den Proportionen gefunden haben. Wir haben schon gezeigt, wie wir das letzte Glied finden sollen. Es lassen sich aber auch nicht nur die mittlere Glieder finden, sondern auch das erste, und selbst das letzte kann noch auf andere Weisen gefunden werden. Das den Alten so schwer gefallene Problem zwischen zwei gegebenen Zahlen zwei andere continuirlich proportionelle zu finden, solle jetzt zuerst vorgetragen werden. Wir wollen es noch allgemeiner machen, und sagen: man solle zwischen zwei gegebenen Zahlen so viel mittlere Proportionalzahlen suchen als man wolle. Die zwei gegebene Zahlen werden also das erste und letzte Glied der Progression seyn, weil die gesuchte mittlere Proportionalzahlen allesamt dazwischen hineinfallen. Weil sie uns nun beide gegeben sind, so wollen wir sie a und b nennen, nemlich das erste a und das letzte b . Ferner muß man einem sagen, wie viel man mittlere Proportionalzahlen verlange, das ist, ob man 3, 4, 5, 6 u. s. w. zwischen a und b suchen solle? folglich muß einem die Zahl der gesuchten Glieder auch gegeben werden; sie solle 4 seyn. Das erste von den unbekannten Gliedern wollen wir, nach der Gewohnheit der Mathematikverständigen

Wie man die schwere Aufgabe von Erfindung zweier mittleren Proportionalzahlen leicht auflösen könne;

Allgemeine Auflösung, nach welcher gezeigt wird, wie man zwischen zwei gegebenen Zahlen so viel

Proportionen u. Progressionen. 211

gen, x nennen ; folglich wird die Progression mittlere Proportion heissen.

$$a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}, \frac{x^4}{a^3}, b.$$

proportional
zahlen finden

Denn nach §. 81. müssen wir folgende Proportionen, die Glieder ausdrücken zu können, niederschreiben :

$$a : x = x : \frac{x^2}{a} \text{ drittes Glied}$$

$$x : \frac{x^2}{a} = \frac{x^2}{a} : \left(\frac{x^4}{a^2} : x \right) = \frac{x^3}{a^2} \text{ viertes Glied}$$

$$\frac{x^2}{a} : \frac{x^3}{a^2} = \frac{x^3}{a^2} : \left(\frac{x^6}{a^4} : \frac{x^2}{a} \right) = \left(\frac{x^6}{a^4} \cdot \frac{a}{x^2} \right)$$

$$= \frac{x^6 a}{a^4 x^2} = \frac{x^4}{a^3} \text{ fünftes Glied. §. 71.}$$

Folglich ist die Progression nochmalen richtig gesetzt, wenn man schreibt

$$a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}, \frac{x^4}{a^3}, b.$$

Demnach müssen auch die Producte der man nur beeden äussersten und von den äussersten immer vers gleich weit abstehenden Glieder einander gleich seyn, folglich

$$ab = x \cdot \frac{x^4}{a^3}, \text{ das ist}$$

$$ab = \frac{x^5}{a^3}$$

$$\frac{\quad}{a^4 b} = x^5$$

$$\frac{\quad}{\quad} = x^5$$

$$a^4 b = x^5$$

Also wird das zweite Glied seyn die Wurzel der fünften Potenz aus dem Product des letzten Glieds in das zur vierten Dignität erhobene erste Glied. Wann nun

$a = 1$, und $b = 243$, so ist $x = \sqrt[5]{243} = 3$; folglich heißt die Progression

1, 3, 9, 27, 81, 243.

Die Auflö-
sung dieser
Frage wird
noch allge-
meiner ge-
macht.

Man kann die Auflösung noch allgemeiner machen, wenn man die Anzahl der gesuchten mittleren Glieder n nennet; denn in diesem Fall sehe ich schon, wie die Progression fortgehen müsse, indeme das letzte der gesuchten Glieder $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ und folglich

das letzte in der ganzen Progression, welches wir als ein gegebenes Glied b nann-
ten, durch einen andern Ausdruck $\frac{x^{n+1}}{a^n}$

heissen wird, weil in der Progression

$$a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}, \frac{x^4}{a^3}, \dots, \frac{x^n}{a^{n-1}}, \frac{x^{n+1}}{a^n}$$

der Exponent des Nenners allzeit um eins weniger ist als der Exponent des Zehlers: Da nun das letzte Glied gegeben, und b genannt wurde, so ist

$$b = \frac{x^{n+1}}{a^n} \text{ folglich}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{x^{n+1}}{a^{n+1}}$$

$$ab = \frac{ax^{n+1}}{a^{n+1}} \text{ das ist}$$

Proportionen u. Progressionen 213

$$ab = \frac{x^{n+1}}{a^{n-1}} \text{ §. 57.}$$

$$\frac{\quad}{\quad} \cdot a^{n-1}$$

$$a^{n-1}ab = x^{n+1}$$

$$a^nb = x^{n+1} \text{ das ist nach §. 49.}$$

$$\frac{\quad}{\quad} \cdot \frac{n+1}{\sqrt{\quad}}$$

$$\sqrt[n+1]{a^nb} = x.$$

Sollte jemand bey dieser Rechnung sich Erklärung nicht mehr besinnen können, warum z. E. einiger

$\frac{a}{a^n} = \frac{1}{a^{n-1}}$ so darf er nur im Sinn für n schwer schei-

eine Zahl z. E. 4 setzen, so wird er haben nenden Gleichungen,

$$\frac{a}{a^4} = \frac{1}{a^{4-1}} \text{ Nun ist } \frac{a}{a^4} = \frac{a}{aaaa}, \text{ die bey dies}$$

das ist, wenn man wirklich dividirt $\frac{1}{aaa}$ ser Rech-

§. 57. folglich $\frac{a}{a^4} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^{4-1}}$. Eben nung vor-

so geht es mit $a^{n-1}ab = a^nb$; dann n sep kommen.

abermal 4, so wird man haben $a^{4-1}ab$

$= a^4b$; die Ursache ist leicht aus §. 49.

begreiflich. Es ist ja $a^{4-1}ab = a^3ab =$

$aaaab = a^4b$, wie es in der angezogenen

Stelle umständlich bewiesen ist. Wir ha-

ben diesen Ausdruck mit Fleiß noch einmal

erläutert, weil ungemein viel daran gele-

gen ist, daß man ihn wisse, und fertig

einsehen lerne.

§. 87. Ehe wir zeigen, wie die Sum-

me einer geometrischen Progression gefun-

Exempel
zur Uebung,
wie man aus
gewissen ge-
gebenen

Stücken ei-
ner geome-
trischen

Progression

ihr erstes
und letztes
Glied fin-

den könne;

den werde, wollen wir noch zur Uebung
ein leichtes Exempel hersetzen, welches uns
lehret, wie man aus gewissen gegebenen
Stücken der Progression ihr erstes und letz-
tes Glied finde. Die gegebene Stücke sollen
seyn:

I. Das Product oder Factum der beeo-
den äussersten Glieder, welches wir
nennen wollen $= f$

II. Die Anzahl der Glieder $= n$

III. Die Grösse der Verhältniß, oder
der Exponent. $= m$

Nun solle man finden das erste Glied $= x$
und das letzte $= y$.

Man wird leicht begreifen,

daß $f = xy$ folglich

$\frac{f}{x} = y$ da nun auch S. 85.

$m^{n-1}x = y$ so ist S. 9.

$\frac{f}{x} = m^{n-1}x$ und

_____ $\cdot x$

$f = m^{n-1}x^2$ folglich

_____ $: m^{n-1}$

$\frac{f}{m^{n-1}} = x^2$ und

_____ $: \sqrt{\quad}$

$\sqrt{\frac{f}{m^{n-1}}} = x$.

Also hat man das erste Glied in lauter
bekannten Grössen gefunden. Wenn es nur
mit

Proportionen u. Progressionen. 215

mit m^{n-1} multiplicirt wird, so hat man auch das letzte Glied; welches ebenfalls gefunden wird, wenn man das gegebene Factum durch das bereits gefundene erste Glied dividirt. Wer Exempel in Zahlen nachmachen will, der wird eine gute Uebung seiner Rechenkunst haben.

§. 88. Die Summe einer geometrischen Progression läßt sich finden, wenn man nur das erste und letzte Glied und den Namen der Verhältniß weiß. Die Art und Weise selbst, wie man aus diesen gegebenen Stücken die Summe findet, können wir nicht faßlich genug vortragen, es sey dann, daß wir unsere Leser zuvor an die umständlich beschriebene Art mit Buchstaben in allerhand Dignitäten zu dividiren erinnern und zuruck denken heißen. Wenn sie z. E. $m^{n-1}a$ durch m wirklich dividiren sollten, wie würden sie es angreifen, damit der Quotient $m^{n-2}a$ u. s. w. herauskomme? Man darf nur n als eine Zahl z. E. 4 sich vorstellen; so wird $m^{n-1}a = m^{4-1}a = m^3 a = mmm a$; diese GröÙe durch m dividirt gibt mma , das ist $m^2 a$, und wenn ich den obigen Exponenten 4 gern beibehalten wollte, $m^{4-2}a$; folglich im allgemeinen Ausdruck, wenn ich für 4 das erste n wieder setze, $m^{n-2}a$. Multiplicirt man nun diesen Quotienten mit dem Divisor m , so hat man $mm^{n-2}a$. das ist $m^{n-1}a$, welches die zu dividirende GröÙe war. Denn wenn ich für n wie-

Was man zu wissen nöthig habe, wenn man die Summe einer geometrischen Progression finden solle, und wie man die wirkliche Division der Buchstaben durch zusammen-gesetzte Divisores zu diesem Vorhaben brauchen und wiederholen müsse.

216 Arithm. IV. Cap. Von den

der 4 setze, so ist $mm^{4-2}a = mm^2a = m^3a = m^{4-1}a$; das ist die obige zu dividirende Grösse. Jetzt können wir die Summe der geometrischen Progression suchen. Das erste Glied seye a , die Zahl der Glieder n , der Name der Verhältniß m , so ist das letzte Glied bekannter massen $m^{n-1}a$; nun wollen wir von diesem letzten Glied das erste subtrahiren, so wird die Differenz seyn $m^{n-1}a - a$, diese Differenz läßt sich vielleicht mit dem um Eins verringerten Namen der Verhältniß, das ist, mit $m - 1$ schicklich dividiren; wir versuchen es wenigstens, und sehen, was heraus kommt: es seye also:

wirkliche
Auflösung
der Frage,
wie man die
Summe ei-
ner geomes-
trischen
Progression
finden solle.

$$m^{n-1}a - a(m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + a + m^{n-5}a + \dots)$$

$$\frac{m^{n-1}a - m^{n-2}a}{+ m^{n-2}a - a}$$

($m - 1$)

$$\frac{m^{n-2}a - m^{n-3}a}{+ m^{n-3}a - a}$$

($m - 1$)

$$\frac{m^{n-3}a - m^{n-4}a}{+ m^{n-4}a - a}$$

($m - 1$)

u. s. w.

Aus dem obigen Quotienten sehe ich schon, wie die Glieder fortgehen; wenn ich nun weiß, wie groß n ist, so wird sich die Division endigen. Z. E. n seye 5; so ist $m^{n-5}a = m^0a = m^0a = a$; also das
erste

Proportionen u. Progressionen. 217

erste Glied. Wäre aber n eine unendlich grosse Zahl, so würde die Division auch ins unendliche fortwähren, und in diesem Fall nichts für die Erfindung der Summe gewonnen werden. Folglich ist die Rede hier nur von endlichen Summen. Bei diesen giebt nun, wie es der Augenschein lehrt, der Quotient alle Glieder, S. 85. ausgenommen das letzte: wenn ich also zum Quotienten das gegebene letzte Glied vollends addire, so habe ich die ganze Summe der geometrischen Progression, welche nach dem gegebenen Beweis folgender massen ausgedruckt werden kann:

$$\frac{m^{n-1}a - a}{m - 1} + m^{n-1}a. \quad \text{Dieser}$$

Ausdruck läßt sich schicklicher und kürzer schreiben, wenn man das zweite Glied als einen Bruch, dessen Nenner eins ist, ansieht, und hernach alles unter einerley Benennung bringt; da es dann heisst

$$\frac{m^{n-1}a - a + m^n a - m^{n-1}a}{m - 1}$$

das ist, wenn man plus und minus in den beiden gleichen Grössen gegen einander aufhebt, $\frac{m^n a - a}{m - 1}$. Nach der ersten

Gleichung wird also die Summe einer geometrischen Progression gefunden, wenn man die Differenz des letzten und ersten Gliedes durch den um eins ver-

und auch wirklich in Worte verfassen könne;

minderten Exponenten dividirt, und zum Quotienten das letzte Glied addirt. Die Rede aber ist, wie wir schon gemeldet, von endlichen Progressionen; daher unsere gegebene Regel auf unendliche Reihen nicht angewandt werden kann. Weil sich aber doch manche ins unendliche fortgehende Progressionen summiren lassen, so wollen wir auch von diesen noch etwas melden.

auf was für Fälle die gegebene Regel sich anwenden lasse.

Ob und wie man ins unendliche fortgehende Progressionen und Reihen summiren könne?

und wie in diesem Fall die Glieder der Progression Brüche seyn müssen, deren Nenner zuletzt unendlich groß werden.

§. 89. Wenn man sagt, daß unendliche Reihen sich summiren lassen, so ist leicht begreiflich, daß die Glieder solcher Reihen immer abnehmen oder kleiner werden, folglich sich zuletzt in Brüche verlihren müssen, deren Nenner unendlich groß sind; sonst wäre es eine pure Unmöglichkeit, die Summe davon in endlichen Zahlen zu geben. Nun wissen wir aus dem dritten Capitel schon, daß eine unendliche Reihe von Brüchen entstehe,

wenn man die Brüche $\frac{a}{b-c}$ und $\frac{a}{b+c}$ durch

die wirkliche Division in ihren Quotienten verwandelt; so haben wir gefunden, daß

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \text{ u. s. w.}$$

Nunmehr aber wollen wir von dieser Aufgabe gleichsam nichts wissen, und einen andern Versuch wagen, welcher darinnen besteht, daß man eine unendliche Reihe summiren solle, wenn man auch nicht wüßte, durch was für eine Division sie entstanden seye. Man gebe uns also etliche Progressionen von Brüchen, deren Zehler allesamt eins sind,

Proportionen u. Progressionen. 219

sind, und deren Nenner in einer geometrischen Progression fortgehen; der allgemeine Ausdruck für diese Gattung von Progressionen wird demnach seyn:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} + \frac{1}{a^6} \text{ u. s. w. } = S,$$

wann nemlich S die zu suchende Summe bedeutet. Nun multiplicire man beiderseits mit a; so hat man

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} \text{ u. s. w. } = a S.$$

Ferner subtrahire man beiderseits eins, so hat man wieder die erste Progression

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} \text{ u. s. w. } = a S - 1.$$

$$\text{Da nun } \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} \text{ u. s. w. } = S$$

$$\text{so ist } a S - 1 = S$$

$$1 = 1$$

$$a S = S + 1,$$

$$S = S$$

$$a S - S = 1.$$

$$(a - 1) S = 1$$

Das ist, schließlich ausgedruckt
S. 60.

folglich wenn beiderseits mit a — 1 dividirt wird,

$$S = \frac{1}{a-1}$$

Wenn also a = 2, so ist die Summe

Einige Gattungen solcher Progressionen werden angeführt; Erster Fall, wann der Zehler immer eins, und die Nenner in einer geometrischen Progression wachsen, aber so, daß die Zeichen immer plus sind.

$$= \frac{1}{2-1} = 1; \text{ wenn } a = 3, \text{ so ist die}$$

$$\text{Summe } \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}; \text{ wenn } a = 4, \text{ so ist}$$

$$\text{die Summe } \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3} \text{ u. s. w.}$$

Der andere Fall ist, wenn die Zeichen plus und minus abwechseln, d. E. es sey

Zweiter Fall,

wenn die Zei-

chen plus

und minus

abwechseln.

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} \text{ u. s. w.} = S$$

$$\text{-----} : a$$

$$1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} = a S$$

Diese Gleichung ist eben so wahr, wenn die Zeichen verändert werden, und es hernach heisset

$$-1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} = -a S,$$

folglich wenn beiderseits eins addirt wird:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} \text{ u. s. w.} = 1 - a S,$$

da nun

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} \text{ u. s. w.} = S \text{ gesetzt wurde, so ist §. 9.}$$

$$1 - a S = S, \text{ und wenn man beiderseits } a S \text{ addirt;}$$

$$a S = a S$$

$$1 = S + a S, \text{ oder schicklicher ausgedruckt §. 60.}$$

$$1 = (1 + a) S$$

folglich

$$\text{-----} : 1 + a$$

$$\frac{1}{1+a} = S.$$

Wenn

Proportionen u. Progressionen. 221

Wenn also $a = 2$, so ist bey abwechselnden Zeichen die Summe der Progression

$$\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}; \text{ ist } a = 3, \text{ so wird die Summe}$$

seyn $\frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$ u. s. w. Es ist ohn^{angemeiner} unser Erinnern klar, daß in beiden Fällen die Auflösung

den der Ausdruck noch allgemeiner werden der beiden könne, wenn man statt des Zehlers einen

Buchstaben z . E. n setzt, der aber die ganze Reihe hindurch unverändert bleibt; in welchem Fall die Summe bey einerley Zeichen heißen wird $\frac{n}{a-1}$, und bey abwechselnden $\frac{n}{a+1}$; denn es seye

$\frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} + \frac{n}{a^3} + \frac{n}{a^4} = S$

..... a

$$n + \frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} + \frac{n}{a^3} = a S$$

..... n subtr.

$$\frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} + \frac{n}{a^3} \text{ u. s. w.} = a S - n.$$

$$\frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} + \frac{n}{a^3} = S$$

..... folglich

$$a S - n = S.$$

$$n = n$$

$$a S = S$$

angeführten Fälle, der Fehler mag hernach eine oder eine andere Zahl seyn, wenn sie nur nicht verändert wird.

$$aS = S + n$$

$$S = S$$

$$aS - S = n$$

$$(a - 1)S = n$$

$$S = \frac{n}{a-1}$$

folglich §. 60.

Was zu thun
seye, wenn
vor dem ers-
ten Bruch ei-
ne oder mehr
ganze Zahlen
in geometris-
cher Pro-
gression vor-
angehen, und
wie man auch
diesfalls die
Summe fin-
den könne.

welches der Euro-
peische Ausdruck war. Endlich ist vorhin klar,
daß zu dergleichen Summen die ganze
Zahlen addirt werden müssen, wenn nem-
lich vor dem ersten Bruch solche stehen;
z. E. wenn die Progression mit 1 anfienge,

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} \text{ u. s. w.}$$

Oder wenn eine wirkliche Progression in
ganzen Zahlen vorangieng; welche man,
wenn sie nur nicht unendlich groß ist, nach
§. 88. summirt, und hernach zur Summe
der Progression in Brüchen addirt.

§. 90. Ausser diesen Progressionen, die
nach einem beständigen und leicht in die Au-
gen fallenden Gesetze sich richten, gibt es
noch andere, welche zwar auch eine Regel ha-
ben, die aber so verdeckt ist, daß man sie nicht
so bald einsiehet. Z. E.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{31} \text{ u. s. w.}$$

ist eine wahre Progression, deren Sum-
me = 1. Die Regel, wornach sie sich
richtet, ist sehr verborgen. Sie heißt aber
so: wenn man die Nenner der Brüche
um eins vermehrt, so sind es Potenzen;
 $3 + 1 = 4 = 2^2$; $7 + 1 = 8 = 2^3$
 $8 + 1 = 9 = 3^2$ $15 + 1 = 16 = 2^4$
u. s. w.

Ob und wie
ferne man
auch andere
solche unend-
liche Pro-
gressionen
summiren
könne, deren
Nenner nach
einem an-
dern und
mehr verbor-
genen Gesetze
sich richten.

Proportionen u. Progressionen. 223

u. s. w. folglich läßt sich ein jedes Glied durch den allgemeinen Ausdruck bestim-

men $\frac{1}{m^n - 1}$. Allein damit wollen wir

uns jezo nicht aufhalten. Die Rechnung selbst, aus welcher erhellet, daß die ganze Summe = 1 seye, ist etwas groß und

weitläufig, unerachtet sie übrigens nicht schwer ist. Wir würden sie aber dennoch ganz hersetzen, wenn die Kunst dergleichen Progressionen zu summiren, von so großem Gewichte wäre. Sie ist nicht so gemeinnüt-

Warum man diese Frage mit keinen umständlichen Exempeln beleuchte.

zig als andere nöthigere Stücke der mathematischen Wissenschaften. Neben dem kann man sich viele Mühe und Arbeit versparen, wenn man bey dergleichen Aufgaben die Fluxionen-Rechnung, oder die Differential und Integral-Rechnung, zu Hülfe nimmt, wie

wir an seinem Ort zeigen werden. Eines

muß ich noch, ehe ich die arithmetische Progressionen erläutere, meinen Lesern vorhal-

ten. Man darf sich nicht irre machen las-

sen, wenn man hie oder da auch von Ge-

lehrten paradoxe Sätze höret, dergleichen

Guido Grandus festgestellt, indeme er be-

hauptet, das unendliche in der Mathematik

habe eine Kraft, aus nichts etwas zu machen,

und eine Summe von unendlich vielen Null-

len in eine wirkliche positive GröÙe zu ver-

wandeln. Man muß die Lehre von dem un-

endlichen vorher in der philosophischen

Schule in Aufsicht auf das sogenannte un-

end-

Was von der Meynung dererjenigen zu halten, welche, wie Guido Grandus, so viel paradox scheinende Sätze in der Lehre von den unendlichen Reysen sich vorstellen und behaupten.

und wie man
vergleichen.
Leute theils
durch die
Grundsätze
der Philoso-
phie, theils
durch eine
genaue Beob-
achtung und
Erklärung der
Divisiones
Regeln, wor-
auf verglei-
chen unend-
liche Ketten
beruhen, wie
der zurecht
weisen müsse.

endliche untersucht haben, sonst wird man sich bald verwirren und auf irrige Begriffe gerathen. Eine von den besten Schriften in dieser Art ist des berühmten Herrn Prof. Ploucquet *Methodus tractandi infinita*, Was aber die von den unendlichen Ketten hergenommene Einwendungen, und besonders die Meinung des Grandus betrifft; so hat der berühmte Hr. Prof. Kästner umständlich in seiner *Diss. de lege continuitatis* darauf geantwortet. Denn die unendliche Ketten sind entweder convergirend oder divergirend: im ersten Fall wird das letzte Glied so klein werden, daß es für nichts zu achten; im letztern Fall aber werden die Glieder, je weiter sie vom ersten abstehen, immer grösser. Da nun beede Ketten durch die Division von $\frac{n}{a-1}$ oder $\frac{n}{a+1}$ entstehen könn-

nen; bey einer wahren Division aber der Rest zum Quotienten noch hinzugesetzt werden muß, auch bey einer Division, die ins unendliche gehet, eben deswegen, weil sie nie aufhöret, immer ein Rest übrig bleibt: so muß man ja bey solchen Ketten, um den wahren Werth des Quotienten zu haben, noch immer einen Rest hinzudenken. Z. E.

wenn ich sage $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 = x^3,$

so muß ich zum Quotienten den Rest $\frac{x^4}{1-x}$
noch addiren, woferne ich nicht fehlen will;
wollte

Proportionen u. Progressionen. 225

wollte ich bey x^{1000} aufhören, so müßte

ich den Rest $\frac{x^{1001}}{1 - x}$ noch addiren u. s. w.

Eben so muß ich bey dem Ausdruck $\frac{1}{1 + 1}$
 $= \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ u. s. w.

immer noch den zu dividirenden Rest $+$
 $\frac{1^{000}}{1 + 1}$ addiren, sollte ich auch ins unende-

liche fort dividiren können. Folglich ist wirklich $\frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2}$ oder $= 1 - \frac{1}{2}$; nemlich mit dem zum Quotienten geschlagenen Rest, welchen man niemals weglassen darf, wenn man den Quotienten richtig haben und in seiner Berechnung nicht fehlen will. Eben von dieser Materie habe auch vor mehrern Jahren schon in meiner Lettre sur quelques paradoxes du Calcul analytique das weitere vorgetragen und ausgeführet.

§. 91. Arithmetische Progressionen entstehen, wenn man continuirlich arithmetische Proportionen so zusammen setzet, daß nicht nur das erste Glied zum zweyten sich verhält wie das zweyte zum dritten, sondern auch das zweyte zum dritten wie das dritte zum vierten, und das dritte zum vierten wie das vierte zum fünften u. s. w. So machen z. E. die in natürlicher Ordnung fortlaufende arabische Zahlzeichen eine arithmetische Progression,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, u. s. w.

Dann $1 - 2 = 2 - 3,$

$2 - 3 = 3 - 4$

$3 - 4 = 4 - 5$ u. s. w.

P

In

In einer arithmetischen Progression wird also die Differenz gesehen; wenn diese ein-
nerley bleibt, so ist die Progression richtig.
So ist die Differenz zwischen 1 und 2 eins,
zwischen 2 und 3 wieder eins, zwischen 3
und 4 gleichfalls eins u. s. w. Gesezt nun, das
erste Glied einer solchen Progression heisse
 a , die Differenz d , so wird der allgemeine
Ausdruck für die arithmetische Progression
seyn:

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d$ u. s. w.
Wenn nun das erste und letzte Glied zusam-
men addirt wird, so hat man $2a + 5d$; ad-
dirt man das zwölfte von vornen zum zwölften
von hinten, so hat man wiederum $2a + 5d$.
u. s. w. Dann

$$\begin{array}{ccccccc} a, & a + d, & a + 2d, & a + 3d, & a + 4d, & a + 5d, & \\ & & a + 2d & a + d & a & & \\ & & \hline & 2a + 5d & 2a + 5d & 2a + 5d & \end{array}$$

Folglich sind in einer arithmetischen Pro-
gression die Summen der beeden äußersten
Glieder und die Summen zweyer von den
äußersten gleich weit absteherender Glieder
alleinmal einander gleich. Diese Eigenschaft
der arithmetischen Progressionen gründet
sich, wie wir schon oben bey der Natur der
Proportionen gemeldet, auf den wesentli-
chen Begriff einer solchen Progression, und
ist aus dem angeführten allgemeinen Aus-
druck leicht erweislich und verständlich. E-
ben dieser Ausdruck bahnet uns zugleich den

Weg

Allgemeiner
Ausdruck
für alle arith-
metische
Progressio-
nen.

Allgemeine
Eigenschaf-
ten der arith-
metischen
Progressio-
nen.

Proportionen u. Progressionen. 227

- Weg, das letzte Glied in einer solchen Progression zu finden. Dann wir sehen, daß die auf das erste folgende Glieder allesamt aus dem ersten Glied und der Differenz, ein oder etlichmal genommen, zusammen gesetzt seyen. Geben wir nun auf die Anzahl der Glieder Achtung, so können wir finden, wie vielmal die Differenz bey einem jeden Glied genommen werde. Bey dem zweyten Glied wird sie einmal genommen, bey dem dritten zweymal, bey dem vierten dreyimal, bey dem fünften viermal; folglich immer einmal weniger, als die Anzahl der Glieder Einheiten hat. Gesezt nun diese Anzahl heisse n , so wird das letzte Glied nach dieser beobachteten Regel seyn $a + (n - 1)d$, demnach bleibt es abermal eine allgemeiner ausgedruckte Progression, wenn man von hinten anfangt, und das letzte Glied zuerst sezt, nemlich

$$a + (n - 1)d, a + (n - 2)d, a + (n - 3)d, \\ a + (n - 4)d \text{ u. s. w.}$$

Ist einem nun das letzte Glied, die Anzahl der Glieder und die Differenz gegeben, so wird sich die Progression leicht endigen, und das erste, wie auch alle übrige Glieder finden lassen. Dann z. E. es seyen $n = 4$, so ist $(n - 4)d = (4 - 4)d = 0$, folglich $a + (n - 4)d = a$, welches das erste Glied ist.

§. 92. Eben so ist es auch leicht, die ganze Summe einer arithmetischen Progression zu finden, wenn man die Anzahl der Glieder und die Differenz gegeben hat. Von der Art und Weise, diese Summe zu finden, wird in dem folgenden Capitel gehandelt.

Wie man das letzte Glied einer arithmetischen Progression auf eine allgemeine Weise finden und ausdrücken, auch dadurch den Ausdruck für die Progression selbst noch allgemeiner machen könne.

die ganze
Summe ei-
ner arith-
metischen
Progression
zu finden.

gression zu suchen. Dann weil allemal die beo-
de äußerste, und die von den äußersten gleich-
weit abstehenden Glieder gleiche Summen
haben, so bekäme man durch die Addition
aller so beschaffener Glieder die ganze Sum-
me richtig; folglich darf man, um Zeit und
Mühe zu sparen, die Summe des ersten
und letzten Gliedes nur in die halbe Zahl
der Glieder multipliciren. Z. E. 2, 4, 6,
8, 10, 12, ist eine arithmetische Progres-
sion: denn wenn man die äußerste und von
den äußersten gleichweit abstehende Glieder
addirt, so hat man

$$\begin{array}{rcccccc} 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12 \\ & & & 6 & 4 & 2 \\ \hline & & & 14, & 14, & 14, \end{array}$$

das ist 3 mal 14. Nun ist diese Operation
zu mühsam; man drückt sich daher gerne
kürzer aus. Wir sehen, daß die Progres-
sion sechs Glieder hat, und folglich durch
die vorgeschriebene Addition 3 gleiche Sum-
men giebt; folglich wollen wir die Anzahl
der Glieder halbieren, und eine von den
Summen, welche sich am besten dazu schickt,
dadurch multipliciren. Die Summe der
beiden äußersten ist die bequemste, weil
der Ausdruck des ersten und letzten Gliedes
so beschaffen ist, daß er auch zu einem kur-
zen und leicht zu behaltenden Ausdruck für
die Summe den Weg bahnen kann. Da
nun das erste Glied a , das letzte $a + (n-1)d$,
so wird die Summe dieser zwey Glieder seyn

$= 2a$

Proportionen u. Progressionen. 229

$= 2a + (n - 1)d$, und wenn man mit der halben Anzahl der Glieder $= \frac{1}{2}n$ multipliziert, die Summe der ganzen Progression $= (2a + (n - 1)d) \frac{1}{2}n = (2a + (n - 1)d) \cdot \frac{n}{2} = \frac{2an + (n^2 - n)d}{2} = an + \frac{(n^2 - n)d}{2}$

Kurzer, als gemeiner und schärfer Ausdruck, die Summe einer arithmetischen Progression anzuzeigen.

Folglich kann man aus dem ersten Glied, der Zahl der Glieder und ihrem Unterscheid die ganze Summe einer arithmetischen Progression finden. Wenn $a = 1$ und $d = 2$, so ist die Summe $= n + \frac{(n^2 - n) \cdot 2}{2} = n + n^2 - n = n^2$, oder das Quadrat der Anzahl der Glieder. Z. E.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15	$= 8^2 = 64$	Wie und warum man durch die Addition der ungeraden Zahlen alle Quadratzahlen erfinden können, wird aus der Natur der arithmetischen Progressionen erwiesen,
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13	$= 7^2 = 49$	
1, 3, 5, 7, 9, 11	$= 6^2 = 36$	
1, 3, 5, 7, 9	$= 5^2 = 25$	
1, 3, 5, 7	$= 4^2 = 16$	
1, 3, 5	$= 3^2 = 9$	
1, 3	$= 2^2 = 4$	
1	$= 1^2 = 1$	

Aus dieser Tabelle erhellt unter anderm, daß alle nur mögliche Quadratzahlen, so weit sie sich denken lassen, durch die Addition der ungeraden Zahlen, das ist, der Glieder einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied 1, und deren Differenz 2 ist, gefunden werden können. Wir werden aber sogleich sehen, wie die arithmetische Progressionen nicht nur bey Erfindung der Quadraten, sondern auch bey

und gezeigt, wie die arithmetische Progressionen überhaupt einen

grossen Ein-
fluß in die
geometrische
haben.

Warum man
die Exempel,
wie man aus
gewissen ge-
gebenen
Theilen ei-
ner arith-
metischen
Progression
die übrige
finden solle,
nicht weit-
läufiger
anführe,
und wie man
nach einem
einigen Exem-
pel die übrige
leicht be-
rechnen könne,

höhern Potenzen einen ungemeinen und höchstwichtigen Einfluß in die geometrische Progressionen haben, wenn wir von den Logarithmen reden. Dann ich halte nicht für nöthig, daß ich mit leichten und überall vorkommenden Aufgaben, z. E. aus der Summe und den gegebenen beiden äußersten Gliedern die Differenz, aus den gegebenen beiden äußersten Gliedern und der Differenz die Summe und die Anzahl der Glieder, aus der Differenz, der Summe und der Zahl der Glieder, die beide äußerste Glieder u. s. w. zu erfinden, meine Leser in die Länge erst noch aufhalten solle. Wer ein Exempel berechnen kann, wird sie alle berechnen können. Z. E. es sey gegeben das letzte Glied = b , die Differenz = d , die Anzahl der Glieder = n ; man solle das erste Glied = x finden. So ist das letzte Glied nach unserm obigen Ausdruck $x + (n - 1)d = x + nd - d$; dieser Ausdruck wird dem gegebenen b gleich seyn, weil eine jede Grösse sich selbst gleich ist. Folglich setze ich

$$b = x + nd - d, \text{ und subtrahire beides}$$

$$b - nd + d = x \quad \text{derseits } nd - d$$

Hier habe ich x in lauter bekannten Zahlen; will ich nun das zweite Glied haben, so addire ich nur noch ein d dazu u. s. w. Verlangte ich die Summe der ganzen Progression, so nehme ich den allgemeinen Ausdruck der Summe

Proportionen u. Progressionen. 231

$$nx + (n^2 - n) \frac{d}{2} = nx + \frac{n^2 d - nd}{2}$$

und da ich x gefunden habe, auch allemal gleiches für gleiches setzen darf, so setze ich seinen Werth in bekannten Grössen, da ich dann bekomme

$$n(b - nd + d) + \frac{n^2 d - nd}{2} \quad \text{oder}$$

unter einerley Benennung

$$\frac{2n(b - nd + d) + n^2 d - nd}{2} \quad \text{und}$$

wenn man wirklich multiplicirt,

$$\frac{2nb - 2n^2 d + 2nd + n^2 d - nd}{2}, \text{ und}$$

wenn man aufhebet, was sich gegeneinander aufheben läßt,

$$\frac{2nb - n^2 d + nd}{2} = \frac{(2b - nd + d)n}{2}$$

wenn man nur die unbekannte oder erst zu erfindende Grösse, nach Gewohnheit der Mathematikverständigen x, y, z, oder überhaupt mit den letzten Buchstaben des Alphabets benennet.

Da ich dann wiederum einen andern Ausdruck für die Summe habe. Doch genug von diesem. Wer sich üben will, wird Gelegenheit genug haben, wenn er nur diejenige Grössen, die er erst erfinden will, x oder y nennet, den übrigen aber ihre alte Namen läßt.

§. 93. Jetzt reden wir von den Logarithmen, deren Erfinder gewis ein Deutscher, Namens Justus Byrge war, er mag hernach aus der Schweiz oder aus den Hessencasselschen Landen gebürtig gewesen seyn; wie ich in meinen Amoenitatibus

Von den Logarithmen, und ihrem Erfinder,

was die logarithmische Rechnung überhaupt sey und heiße,

wird zuerst

mit Exem-

peln in Zah-

len erläutert,

und gezeigt,

daß durch

diese Rech-

nung die

Multiplika-

tion in eine

Addition,

acad. Fasc. I. mit mehrerem gezeigt. Nach ihm hat erst Johann Nepper, ein Schottländer, den Gebrauch davon gemeinnütziger gemacht, nicht aber die Sache selbst, wie einige vorgeben, erfunden. Wenn unter eine mit eins anfangende geometrische Progression eine mit Nulle anfangende arithmetische Progression so geschrieben wird, daß die Glieder der beiden Progressionen in richtiger Ordnung sich auf einander beziehen, so heißt man die Glieder der arithmetischen Progression die Logarithmen von den ihnen correspondirenden Gliedern der geometrischen Progression. Z. E.

1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,
0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7.

Bei diesen zwei Progressionen ist 0 der Logarithmus von 1, 3 der Logarithmus von 8, 5 der Logarithmus von 32, 7 der Logarithmus von 128. u. s. w.

Durch diese Logarithmen wird nun die Multiplication in eine Addition, die Division in eine Subtraction, die Erhöhung zu Potenzen in eine Multiplication, und die Ausziehung der Wurzel in eine bloße Division verwandelt. Z. E. man wollte wissen, wie viel 4. 16 wäre? Wenn ich die Logarithmen brauchen will, so suche ich den Logarithmus von 4, welcher 2 ist, und den von 16, welcher 4 ist; diese beide Logarithmen addire ich zusammen, da ich dann

Proportionen u. Progressionen. 233

dann die Summe 6 bekomme. Nun suche ich, was für eine Potenz in der geometrischen Progression sich darauf bezieht; sie heißt 64; also ist 64 das Product von 4. 16. die Division in eine Subtraction,

Ferner wenn ich 128 durch 4 zu dividiren hätte, so suche ich wieder die Logarithmen von beeden Zahlen; von der zu dividirenden Zahl 128 ist der Logarithmus 7, und 2 ist es vom Divisor 4. Nun ziehe ich den Logarithmus des Divisors vom Logarithmus der zu dividirenden Zahl ab, nemlich 2 von 7, da dann der Rest 5 dem Quotienten 32 correspondirt. Will ich 4 zur dritten Potenz erheben, so nehme ich den Logarithmus von 4, welcher 2 ist, und multiplicire ihn mit 3, weil ich die dritte Dignität verlange; das Product $3 \cdot 2 = 6$ ist der Logarithmus der gesuchten Potenz 64, welche ihm correspondirt. die Erhebung zu Potenzen in eine Multiplication,

Wenn ich endlich die Quadratwurzel aus 64 ausziehen will, so dividire ich den Logarithmus dieser Zahl, nemlich 6 durch 2; da dann der Quotient 3 auf die gesuchte Quadratwurzel 8 weist. und die Ausziehung der Wurzeln in eine Division verwandelt werde.

Damit diese schöne Erfindung unsern Lesern noch deutlicher gemacht werde, so wollen wir jetzt zwei andere Progressionen nehmen, und hernach den allgemeinen Beweis vortragen. Ein anderes Exempel in Zahlen wird angeführt.

geom. 1, 3, 9, 27, 81, 243
arithm. 0, 2, 4, 6, 8, 10

Nun verlangt man das Product aus 3. 27; die Logarithmen davon sind 2 und 6, ihre

Summe ist 8 ; dieser correspondirt 81 ; also ist 81 das Product aus 3. 27. Auf gleiche Weise bezieht sich auf 243 : 9 der logarithmische Ausdruck $10 - 4 = 6$, welche Zahl auf den Quotienten 27 weist. 3 in der fünften Dignität oder 3^5 ist logarithmisch ausgedruckt $2.5 = 10$, worauf 243

sich beziehet. Die Cubicwurzel oder $\sqrt[3]{}$ aus 27 ist logarithmisch ausgedruckt $6 : 3 = 2$; welcher Zahl 3 als die gesuchte Wurzel correspondirt. Man siehet also , daß es gleichgültig seye , was man für eine arithmetische Progression unter die geometrische schreibt , wenn man nur hernach bey der einmal angenommenen bleibt ; welches nun auch aus dem allgemeinen Beweis noch mehr erhellen wird. Es seye demnach
 geom. $1, n, n^2, n^3, n^4, n^5, n^6, n^7$ u. s. w.
 arithm. $0, d, 2d, 3d, 4d, 5d, 6d, 7d$ u. s. w.
 so wird n^2, n^5 logarithmisch seyn $2d + 5d = 7d$, welchem Glied n^7 correspondirt ; folglich ist n^7 das Product, wie wir es im 2 Capitel §. 49. gefunden haben. $n^6 : n^2$ ist logarithmisch $6d - 2d = 4d$, folglich der darauf sich beziehende Ausdruck n^4 der wahre Quotient der gesuchten Zahl ; wie wir §. 49. unabhängig von dieser Erfindung bewiesen haben. n^2 in die dritte Potenz erhoben ist logarithmisch $2d. 3 = 6d$; welcher Ausdruck sich auf n^6 beziehet ; also ist n^6 die dritte Dignität von n^2 , wie
 end

ob und warum es gleichgültig seye, was man für eine arithmetische Progression, die Logarithmen zu bestimmen, erwähle ;

Wie man die Logarithmische Rechnung auf eine allgemeine Art erweisen und demonstrieren könne.

endlich die $\sqrt[3]{}$ aus n^6 logarithmisch $6d:3 = 2d$ uns wieder n^2 weist. Diß ist der Beweis der logarithmischen Regeln, welcher so faßlich vorgetragen wird, als nur immer möglich ist. Dann die zwei allgemeine Progressionen werden jedermann verständlich seyn. Bey der arithmetischen könnte man vielleicht fragen, warum wir nicht unsern Ausdruck der Progression aus §. 91. beibehalten und geschrieben haben

$a, a + d, a + 2d, a + 3d$ u. s. w.

Alein das erste Glied ist ausdrücklich $= 0$ gesetzt worden; folglich würde die Progression heißen müssen

$0, 0 + d, 0 + 2d, 0 + 3d$ u. s. w.

Das heißt aber eben so viel, als

$0, d, 2d, 3d, 4d$ u. s. w. weil die Null- le weder vermehrt noch vermindert. Jetzt wird nichts mehr am ganzen Beweis schwer seyn. Uebrigens erhellet zugleich aus dem bisherigen, daß die Exponenten der Größen wirklich als ihre Logarithmen angesehen werden können; wie dann aus dieser Aehnlichkeit der Herr Baron von Wolff die ganze Lehre von der Multiplication und Division der Potenzen u. s. w. hergeleitet und erwiesen hat.

§. 94. Allein unsre Leser können mit Recht noch einen andern Anstand haben, und uns die Einwendung machen, wir haben wohl die Logarithmen von einer Progression überhaupt gefunden, aber noch

Warum in dem gegebenen Beweis der allgemeine Ausdruck der arithmetischen Progressionen in etwas abgeändert sey.

Die Exponenten der Dignitäten können als ihre Logarithmen angesehen werden, wie deswegen Hr. Baron von Wolff aus der Natur der Logarithmen die Multiplication u. Division der Potenzen hergeleitet hat.

Ob und wie man auch Logarithmen für die zwei

sehen die
Glieder der
geometri-
schen Propor-
tion fallende
Zahlen finden
können?

Allgemeine
Beantwor-
tung dieser
Frage.

Besondere
Auflösung
und Antwort,
daß man die

noch nicht gezeigt, ob und wie man auch die Logarithmen der zwischen die Glieder fallenden Zahlen finden könne? z. E. zwischen 2 und 4 fällt 3, davon hat man noch keinen Logarithmus; zwischen 4 und 8 fallen 5, 6, 7, auch davon fehlen die Logarithmen u. s. w. folglich fragt man jetzt, ob diese Zahlen gar keine Logarithmen haben, oder wenn sie solche haben, wie sie gefunden werden? diese Frage verdienet vorzüglich beantwortet zu werden. Wir wollen eine allgemeine Auflösung vorläufig sagen, ehe wir die besondere Art, die Logarithmen der Zwischenzahlen zu finden, anführen. Man sucht zwischen zwey gegebenen Gliedern, z. E. zwischen 2 und 4, so viel mittlere Proportionalzahlen, mit den ihnen correspondirenden Logarithmen, bis man endlich eine findet, welche der Zahl 3 entweder ganz gleich oder am nächsten kommt; da man dann den dazu gehörigen Logarithmus auch sucht und darunter schreibet. Nun siehet man wohl, daß man die Zwischenglieder und ihre Logarithmen nicht so accurat finden könne; daher hilft man sich mit Brüchen von grossen Nennern, damit der Fehler so klein werde, als immer möglich ist, und oft kaum ein Milliontheilgen betrage. Diß ist die allgemeine Antwort. Die besondere wird nun auch faßlich seyn. Man hat die geometrische Decimalprogression von 1, 10, 100 u. s. w. ange-

Proportionen u. Progressionen. 237

angenommen; und unter diese die in nat^{urlicher} Ordnung fortgehende und von Nullen anfangende Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. geschrieben. Z. E.

Geom. 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000,

Arithm. 0, 1, 2, 3, 4, 5,

Also ist der Logarithmus von 1, 0, von

10, 1, von 100, 2 u. s. w. Zwischen 1

und 10 sucht man die mittlere geometrische

Proportionalzahl; zwischen der gefundenen

und zehn abermal die mittlere

u. s. w. bis man endlich eine gefunden,

die 9 am nächsten ist. Eben so sucht

man zugleich zwischen 0 und 1 die mittlere

arithmetische Proportionalzahl, und fährt

mit dieser Operation so lange fort, bis

man das dem Neuner correspondirende

oder am nächsten kommende arithmetische

Glied gefunden hat, welches hernach sein

Logarithmus ist. Damit nun der Fehler

kleiner werde als ein Milliontheilgen, so

hängt man dem Einsen und dem 10 sieben

Nullen an; z. E. 1.00000000, 10.00000000,

wodurch angezeigt wird, daß beide Zah.

len einen Nenner haben = 100000000; ring und

dann $1 = \frac{1.00000000}{1.00000000}$ und $10 =$

$\frac{10.00000000}{1.00000000}$. Damit man aber nicht so

viel schreiben darf, so läßt man den Nenner

weg, weil der nach dem Einsen und

Zehner angehängte Punkt, der sonst auch

die

geometrische Progression von 1, 10, 100, 1000, u. s. w. angenommen und nach den Proportionsregeln die Zwischen-Glieder suche,

warum man die Glieder nicht accurat finden könne,

wie man aber doch Mittel habe, den

Fehler so gering und

klein zu machen, als nur

immer mög

lich seye,

und wie dies

ses durch an

die

gehängte
Nullen und
Decimalbrü-
che geschehe,

die Characteristik genannt wird, von selbst den Nenner durch die folgende Nullen angezeigt, den man im Sinn hinzudenken muß. Zwischen diesen zwey Gliedern sucht man nun, wie schon gemeldet wurde, die mittlere geometrische Proportionalzahl, u. s. w. bis man auf neune kommt. Eben so macht man es mit der arithmetischen Progression, deren Gliedern gleichfalls sieben Nullen angehängt werden. Dann $\frac{0.0000000}{10000000} = 0,$

und $\frac{1.0000000}{10000000} = 1.$ Man läßt daher

abermal, um das Schreiben zu verkürzen, den Nenner hinweg, und sucht zwischen dem ersten und zweyten Glied die mittlere arithmetische Proportionalzahl, u. s. w. bis man die findet, die dem Nenner mit seinen sieben Nullen in der geometrischen Progression correspondirt. Nach dieser Operation sucht man zwischen 1 und 9 die mittlere Proportionalzahl u. s. w. auf gleiche Weise, bis man den Achter bekommt u. s. w. • Nun können wir es unsern Lesern nicht verargen, wenn sie sagen, das seye die verdrüßlichste Arbeit von der Welt. Allein wir legen ihnen ja diese Arbeit nicht auf, und fordern nicht einmal ein einiges Exempel von ihnen, das sie berechnen sollten, vielweniger alle. Sie sind längstens berechnet, und es ha-

warum einen
diese ver-
drüßliche und
mühsame
Rechnung
nicht erschre-
cken dürfe,

ben

Proportionen u. Progressionen. 239

ben sich Leute, welche zu solchen mühsamen Arbeiten gleichsam gebohren werden müssen, entschlossen, Jahr und Tag an einem fort zu rechnen, und ihre Rechnungen durch den Druck gemeinnützig zu machen. Das sind die sogenannte Tabulae Sinuum & Tangentium, wo nicht nur für die Zahlen, sondern auch für die Linien, die man Sinus und Tangenten nennet, alle nöthige Logarithmen berechnet sind, und von denen, die was logarithmisch auflösen wollen, nur erkaufte und nachgeschlagen werden dürfen. Nun ist leicht begreiflich, daß einem Buch von lauter Zahlen in Ab-
und wie ta-
den sogenan-
annten loga-
rithmischen
Tafeln
alles schon
vorgeschaft
und zum
voraus be-
rechnet seye;
sicht auf seine Richtigkeit nicht allemal zu trauen sey. Doch darf man eines von diesen den Lesern vorzüglich anpreisen, nemlich das Vlacquische, welches das correcteste seyn solle. Warum man übrigens die Decimalprogression 1, 10, 100, 1000 u. s. w. angenommen und allen übrigen bey dieser Arbeit vorgezogen habe, ist aus dem gro-
correcteste
gehalten
werden.
ßen Vortheil der Decimalbrüche leicht zu verstehen. Eine Rechnung, wo lauter Decimalbrüche vorkommen, macht nicht halb so viel Mühe, als eine andere; und läßt sich auch neben dem weit kürzer ausdrucken. Denn wenn ich z. E. die Progression $3 + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{7}{100000}$ habe, so heißt sie so viel als der einrige Bruch $\frac{342857}{100000}$, oder, wenn ich den Nenner gar weglaße 3. 42857; in
warum man
zu dieser Ar-
beit die De-
cimalpros-
gression von
1, 10, 100 u.
s. w. vorzü-
glic erwehlt
wel-

welchem Fall die Zahlen nach dem Punkt, oder nach der Characteristik 3, Decimalfractionen anzeigen, oder Zehler von Nennern sind, die in der Decimalprogression fortgehen, oder deren gemeinschaftlicher Nenner so viel Nullen hat, als der ganze Zehler Zahlzeichen hat. Der Beweis davon ist leicht, wenn man nur die angeführte Brüche nach der Hauptregel unter einerley Benennung bringt. Wir werden aber bey Ausziehung der Wurzeln das weitere von den Vortheilen der Decimalbrüche sagen.

Vom Gebrauch der Logarithmen in der Buchstabenrechnung, und wie man sich hier noch kürzer ausdrücken könnte.

Beweis der logarithmis

§. 95. Wir haben alles, was von den Logarithmen zu wissen nöthig ist, umständlich vorgetragen. Eines ist noch übrig, daß wir nemlich auch zeigen, wie man in der allgemeinen Buchstabenrechnung sich der Logarithmen bedienet. Wir wollen die Logarithme mit dem Buchstaben l ausdrücken und z. E. sagen, der Logarithmus von a seye la , der Logarithmus von b seye lb , der Logarithmus von y seye ly u. s. w. Wenn wir demnach das Product abx logarithmisch ausdrücken wollten, so müßte es heißen $la + lb + lx$, weil wir wissen, daß die Multiplication durch die logarithmische Rechnung in eine Addition verwandelt wird §. 93. und weil die Division eine Subtraction wird, so wird der Ausdruck $\frac{ax}{y}$ logarithmisch heißen $(la + lx) - ly,$

—ly, der Ausdruck $\frac{b}{a} = lb - la$ u. s. w. schon Aus-

In Rücksicht auf die Wurzel und Digni-
täten dürfen wir auch die allgemeine Rech-
nung brauchen: dann weil x^2 logarithmisch
2lx, und x^5 , 5lx, und x^n , nly u. s. w.
heißt, so werden sich auch schwerere Aus-
drücke bald geben. Z. E. a^{n-2} wird loga-
rithmisch heißen nla—2la; dann gesetzt n
seye 5, so hiesse der Ausdruck a^{5-2} in der
logarithmischen Rechnung 5la—2la=3la.
Da nun a^3 logarithmisch 3la heißt, so ist
der obige Ausdruck a^{5-2} durch die Loga-
rithme 5la—2la, und der allgemeine a^{n-2}
durch die Logarithme nla—2la richtig ge-
geben worden. Eben dieses läßt sich auch
aus der allgemeinen Divisionsregel erwei-

sen. Denn weil $a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2}$ §. 57. und

die Logarithmen die Division in eine Sub-
traction verwandeln, so muß der logarith-
mische Ausdruck heißen na—2la. Diese
Ausdrücke muß man sich wohl bekannt ma-
chen. Wir wollen noch andere Exempel
vorschreiben. Der Ausdruck $b^{n-1}xy$ heißt
logarithmisch nlb—lb+lx+ly; der Aus-
druck $a^n b^{x-2}y$ heißt logarithmisch nla+
xlb—2lb+ly; der Ausdruck $x^2 y^{n-4}a$
heißt logarithmisch 2lx+nly—4ly+la.
u. s. w. Mit den Wurzeln hat es eine glei-

che Beschaffenheit. Z. E. $\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$ ist
logar

logarithmisch $\frac{3\ln}{4}$ oder $\frac{3}{4}\ln$, $\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$
 ist logarithmisch $\frac{2}{5}\ln x$ u. s. w. Den Vortheil
 von diesen Ausdrücken wollen wir jezo in
 einigen Exempeln zeigen.

Anwendung
 der logarith-
 mischen
 Buchstaben-
 rechnung auf
 ein Exempel,
 wenn man die
 Anzahl der
 Glieder
 einer geome-
 trischen Pro-
 gression finden
 solle.

§. 96. Man solle in einer geometri-
 schen Progression aus dem gegebenen ersten
 und letzten Glied und dem Namen der
 Verhältniß oder dem Exponenten, die
 Zahl der Glieder finden. Dieses Exem-
 pel wird uns schon von dem Nutzen der lo-
 garithmischen Ausdrücke überzeugen kön-
 nen. Es seye demnach das letzte Glied = b.
 und das erste = a.
 der Name der Verhältniß oder
 der Exponent = m.
 und die gesuchte Anzahl der
 Glieder = x.

So ist nach §. 85. das letzte Glied, anders
 ausgedruckt, $m^{x-1}a = b$; das ist, nach lo-
 garithmischen Ausdrücken §. 95.

$$x\ln m - \ln m + \ln a = \ln b. \text{ Folglich §. 9.}$$

$$x\ln m - \ln m = \ln b - \ln a \quad \text{und weil §. 9.}$$

$$\ln m = \ln m$$

$$\frac{x\ln m = \ln b - \ln a + \ln m}{\ln m} : \ln m$$

$$x = \frac{\ln b - \ln a + \ln m}{\ln m} \quad \text{das ist nach §. 60.}$$

schließlich ausgedruckt

$$x = \left(\frac{\ln b - \ln a}{\ln m} \right) + 1.$$

Wenn

Proportionen u. Progressionen. 243

Wenn nun a , b und m in Zahlen gegeben sind, so schlägt man in den logarithmischen Tabellen die Logarithmen davon auf, Die Regel ziehet den Logarithmus des ersten Glieds selbst wird in von dem Logarithmus des letzten Gliedes ab, Worten ausdividirt hernach die Differenz durch den Logarithmus des Exponenten, und addirt zum gedruckt. Quotienten noch eins, damit die Anzahl der Glieder nach der vorgeschriebenen Formel herauskomme. Dieses Exempel wird hinlänglich seyn, unsern Lesern eine Kenntniß von dem Gebrauch der Logarithmen in der Buchstabenrechnung beizubringen, und sie von dem großen Werth dieser Erfindung zu überzeugen. Wollen sie noch etwas zum Lobe des Erfinders hinzudenken, so ist es dieses, daß sie durch diese Rechnung nicht nur des weitläufigen Multiplicirens und Dividirens, sondern auch der so beschwerlichen Ausziehung der Wurzeln, besonders aus höhern Dignitäten, gänzlich überhoben werden. Dahero man allerdings auch nebenher denjenigen Arbeitern, welche uns durch wirkliche Berechnung der Logarithmen für die correspondirende Zahlzeichen vorgeschaft haben, einen wahren Dank abzustatten hat.

§. 97. Die Lehre von den Proportionen und Progressionen ist nunmehr nach ihrem ganzen Umfang vorgetragen worden. Es giebt aber noch verschiedene sogenannte Nebenproportionen und Progressionen, welche wir unserem Vorhaben

Große Vorzüge und Nutzbarkeit der logarithmischen Erfindung.

Kurze Anzeige einiger sogenannten Nebenproportionen und Progressionen,

nemlich der
harmonis-
schen,

gemäß kürzlich anzeigen, weil sie aber von keinem so grossen Gewichte und Nutzen sind, als die bisherigen, nicht ausführlich vortragen werden. Hieher rechnen wir die harmonische und contraharmonische Proportionen, die Pronizahlen, wie auch die sogenannte Polygonal- und Pyramidalzahlen. Eine harmonische Proportion entsteht, wenn die Differenz des ersten und zweiten Gliedes sich zur Differenz des dritten und vierten verhält, wie das erste Glied sich zum vierten verhält. Ist das zweite Glied dem dritten gleich, so ist von selbst klar, daß in diesem Fall die Differenz des ersten und zweiten sich zur Differenz des zweiten und dritten verhalte, wie das erste zum dritten. Z. E. 10, 16, 40 sind drey harmonische Proportionalzahlen; dann die Differenz zwischen dem ersten und zweiten Glied $16 - 10 = 6$, und die Differenz zwischen dem zweiten und dritten Glied $40 - 16 = 24$, verhalten sich zu einander wie das erste zu dem letzten Glied, oder wie 10 zu 40; weil

$$6 : 24 = 10 : 40.$$

und contra-
harmonis-
schen Pro-
portionen,

Die contraharmonische Proportion ist gerade umgekehrt: dann bey dieser verhält sich die Differenz der zwey ersten Glieder zur Differenz der zwey folgenden, wie das letzte Glied zum ersten sich verhält. Z. E. 3, 5, 6 sind drey contraharmonische Glieder, weil sich verhält $3 - 5 = 2$ zu $6 - 5 = 1$

Proportionen u. Progressionen. 245

5 = 1 wie 6 zu 3. Sollte also aus zwey gegebenen Gliedern a und b in einer harmonischen Proportion das dritte x gefunden werden; so heißt die Proportion:

$$\begin{array}{ll}
 b - a : x - b = a : x & \text{folglich} \\
 \hline
 bx - ax = ax - ab & \text{und §. 9.} \\
 bx = 2ax - ab & \text{ferner} \\
 ab + bx = 2ax, & \text{und} \\
 \hline
 ab = 2ax - bx, & \text{das ist §. 60.} \\
 ab = (2a - b)x & \text{folglich} \\
 \hline
 : 2a - b & \\
 \hline
 \frac{ab}{2a - b} = x. &
 \end{array}$$

Die contraharmonische dritte Proportionalzahl läßt sich eben so finden, nur muß man die Auflösung noch auf das folgende Capitel versparen, weil eine unreine quadratische Gleichung dabey vorkommt, wovon wir erst im fünften Capitel handeln werden. Uebrigens siehet man schon, daß es, wann man mehr Glieder auf gleiche Art sucht, harmonische und contraharmonische Progressionen geben werde, und daß überhaupt diese ganze Lehre keine neue Hauptgattung der Proportionen ausmache.

§. 98. Was die Pronitzahlen betrifft, so bestehet die ganze Wissenschaft davon darinnen, daß man die Summe eines Quadrats und seiner Wurzel eine Pronitzahl nennt; folglich ist $n^2 + n$, oder $a^2 + a$ eine sogenannte Pronitzahl; oder

der sogenannten Pronitzahlen.

der Polygo-
nalzahlen,

in wirklichen Zahlzeichen sind $4 + 2, 9 + 3, 16 + 4, 25 + 5$, das ist, 6, 12, 20, 30 u. s. w. wirkliche Pronizahlen. Weil wir die unrelne quadratische Gleichungen noch nicht erkläret, so können wir auch bey diesen Grössen noch nicht ausführlich zeigen, wie ihre Wurzeln gefunden werden. Polygonalzahlen sind diejenige Zahlen, welche durch die Addition der Glieder in einer arithmetischen Progression, die mit Eins anfängt, entstehen, z. E.

I.	{	arithm. Progr.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,
		polng. Zahlen	1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,
II.	{	arithm.	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,
		polngon.	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,
III.	{	arithm.	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19,
		polngon.	1, 5, 12, 22, 35, 51, 70.

nebst einer
Erklärung
vom Ur-
sprung ihres
Namens.

Weil das zweite Glied in der ersten Classe der Polygonalzahlen 3 ist, so heißt man sie Trigonal- oder Triangularzahlen; aus gleichem Grunde werden die in der zweiten Classe Quadrangularzahlen, die in der dritten Pentagonalzahlen u. s. w. genannt. Ihren Namen haben sie von den geometrischen Figuren, daraus sie entstehen können, erhalten. Darum heißt das zweite Glied in einer Polygonalzahl die Anzahl der Winkel, welche anzeigt, wie viel diejenige geometrische Figur Winkel habe, mit welcher die Polygonalzahl eine Aehnlichkeit hat, oder woraus sie entstehen könnte. Die Seite des Polygons

gons hingegen ist die Anzahl der Glieder der arithmetischen Progression, aus deren Summe die gegebene Polygonalzahls erwachsen ist. Wie man nun daraus die Polygonalzahls u. s. w. finden könne, ist leicht begreiflich. Die Sache aber selbst ist von keinem so grossen Gewichte, und kommt in der ganzen Mathematik gar selten vor; daher wir unsern Leser nicht damit aufhalten wollen. Ein gleiches müssen wir von den Pyramidalzahlen sagen; der Pyramide entstehen, wenn man Polygonalzahl = dalzahlen len addirt. Z. E.

Polygon. Triang. 1, 3, 6, 10, 15, 21. u. s. w.

Pyramid. 1, 4, 10, 20, 35, 56.

Wenn nun diese wieder aufs neue addirt werden, so heissen die herauskommende Glieder Pyramidalzahlen von höhern Satzungen u. s. w. Unsere Leser begreifen von selbst, daß man noch viele Veränderungen mit den Zahlen vornehmen, und für eine jede Veränderung neue Namen ausfindig machen könne. Da wir nun die fruchtbarste, gemeinnützigste und nöthigste Veränderungen in Rücksicht auf die Proportionen und Progressionen gesagt haben, so nicht so weit wollen wir jezo zum Beschluß eilen, und läufig davon ihre Gedult mit keinen weder neuen noch alten Zahlennamen, dahin auch die gerade und ungerade, ferner die Primzahlen und andere gehören, in die Länge mehr ermüden. Wenn man nur das, was von den geo-

Warum man
nicht so weit
läufig davon
handle.

metrischen Proportionen vorgetragen worden ist, dem Gemüthe wohl eindrückt, so wird man im folgenden leicht fortkommen; dann die Lehre von den Proportionen ist gleichsam die Seele der ganzen Mathematik.

Was die
Combinations-Regeln
seyn,

wie oft eine
gegebene Anzahl Buch-
staben ver-
sezt werden
können,

§. 99. Den Beschluß dieses Capitels machen wir mit den Combinations-Regeln, kraft welcher man eine gegebene Anzahl Buchstaben, Wörter, Namen oder Personen so oft versetzen solle, als es möglich ist. Wir nehmen zuerst zween Buchstaben a und b; diese lassen sich 2mal versetzen. Denn entweder sage ich ab oder ba; eine dritte Versetzung ist nicht möglich. Hernach versuche ich es mit drey, oder ich nehme den Buchstaben c dazu; dessen Versetzung suche ich zuerst mit ab, da es dann heißt

c a b

a c b

a b c,

Weiter oder mehrmalen läßt er sich nicht versetzen. Hernach combinire ich ihn mit ba, da ich wieder drey Versetzungen bekomme, nemlich

c b a

b c a

b a c,

Auflösung

und

Beweis.

also in allem sechs. Wenn ich nun den vierten Buchstaben d dazu nehme, so muß ich ihn mit einem jeden von den gefundenen sechs Ausdrücken verbinden; da er sich dann mit einem jeden viermal verbindet

den läßt, z. E. mit dem ersten cab, kann ich d viermal verbinden, daß herauskommt

- 1) d c a b
- 2) c d a b
- 3) c a d b
- 4) c a b d

Eben so vielmal läßt sich dieser Buchstab mit einem jeden der folgenden Ausdrücke verbinden; folglich lassen sich 4 Buchstaben 6. 4mal, das ist 24mal versehen. Nun habe ich schon eine Regel, nach welcher die übrige Verbindungen sich richten werden. Dann zwey lassen sich zweymal, drey sechsmal, vier vier und zwanzigmal, das ist, 2 lassen sich 2. 1. drey lassen sich 3. 2. 1, und 4 lassen sich 4. 3. 2. 1 versehen. Folglich werden fünfe 5. 4. 3. 2. 1 und sechse 6. 5. 4. 3. 2. 1 mal sich versehen lassen. Wenn also die Anzahl der Buchstaben n ist; so wird die Anzahl der Veränderungen seyn $n. n - 1. n - 2. n - 3. n - 4. n - 5$ u. s. w. Ist mir nun n in endlichen Zahlen gegeben, so wird es zuletzt = 1 werden, folglich das Product sich endigen. Wenn also 12 Personen an einer Tafel sitzen, so kann man 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1mal, das ist, viele Millionen mal mit ihnen abwechseln. Eben hieraus siehet man, wie oft sich die sämtliche Buchstaben des Alphabets, die einsylbige Wörter in einem Vers u. s. w. versehen lassen. Es giebt zwar noch verschied-

Was für Res-
benfragen
bey dieser
Regel vor-
kommen
können, und
wie sie be-
antwortet
werden.

dene Fälle bey dieser Combinations-Regel.
Z. E. wenn einige Buchstaben doppelt oder
drenmal u. s. w. vorkommen, in welchem
Fall man das Product wiederum dividiren
muß. Dann es solle a allein gegeben seyn,
so hat man, wenn a doppelt vorkommt,
eben den einigen Ausdruck aa; kommt b noch
dazu, so heißt es baa, aba, und aab; kommt
c noch dazu, so läßt es sich mit einem jeden
der drey gefundenen Ausdrücke, wie oben
4mal verbinden; folglich giebt es 12 Ver-
bindungen. Demnach jedesmal nur halb so
viel, als bey der Verbindung von 4 zerschie-
denen Buchstaben. Die Regel heißt mich
also in diesem Fall das obige Product mit
2 dividiren. Die Anzahl der Verset-
zungen wird folglich, wenn ein Buchstab 2
mal vorkommt, durch einen allgemeinen
Ausdruck seyn $n.n - 1.n - 2.n - 3$ u. s. w.

2 . 1

Eben so kann man eine Regel finden,
wenn ein Buchstab drenmal vorkäme, da
denn der Divisor heißen wird 3.2. 1. u. s. w.
Aus dem bisherigen siehet man schon, daß
sich allerhand Fälle bestimmen und unter
gewisse Regeln bringen lassen. Dahin
gehört auch die Combination der Zahlzei-
chen nach der Decimalprogression, wie wir
im ersten Capitel vorläufig gemeldet haben.
Z. E. es ist die Frage, wie oft neun Zahl-
zeichen mit einander so verbunden werden
können, daß allemal je zwey und zwey zu-
sammen-

Proportionen u. Progressionen. 251

sammen kommen, und jedes derselben 2mal zu sich selbst gesetzt werde. Die Auflösung wird sich leicht geben, wenn ich zuerst mit 2 Buchstaben es versuche. a und b seyen die Buchstaben. Folglich wird nach der Regel die Verbindung herauskommen:

aa, ab

bb, ba

Weitere Versetzungen von dieser Gattung giebt es nicht. Die Combination ist also von 2 Buchstaben nach der gegebenen Regel 4mal möglich. Nehmen wir drey, nemlich a, b, c, so ist ausser

aa, ab, ac,

bb, ba, bc,

cc, ca, cb,

keine weitere regelmäßige Versetzung mehr möglich. Demnach geben 3 Buchstaben 9 solche Versetzungen. Eben so wird man finden, daß 4 Buchstaben 16 Versetzungen geben u. s. w. Folglich allemal das Quadrat von der Anzahl der gegebenen Buchstaben. Wenn also die Anzahl der Buchstaben n , so ist die Anzahl der Versetzungen n^2 ; und bey den 9 Zahlzeichen ist die Anzahl der Versetzungen nach der gegebenen Regel 81 das Quadrat von neune. Diese Regel hält ihre Probe. Wir wissen, daß wir von 10 bis 100, 90 Versetzungen der Zahlzeichen haben; unter diesen 90 Verbindungen sind neune mit 0 verbunden, nemlich 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Diese

Warum man von zehn nicht weiter als bis hundert in der Decimalprogression die Zahlen mit zwey Zahlzeichen schreiben könne,

und hernach bey 100 schon drey Zahlzeichen mit einander verbinden müsse,

Diese 9 von 90 abgezogen lassen gerade 81, die Anzahl der Verbindungen von den Zahlzeichen selbst. Eben so kann man eine Regel von 100 bis 1000 finden; da nemlich jedes Zahlzeichen 3mal vorkommt, und die Verbindung dreysach ist; u. s. w. Auf gleiche Weise lassen sich alle mögliche Wörter in einer Sprache bestimmen, wann es der Mühe werth wäre, diese Sache zu untersuchen: dann die Arbeit wäre in der That mühsam, weil man wegen den mancherley Combinationen, da es Wörter aus 2, 3, 4, 5 und mehr Buchstaben gibt, auch wegen den gehörigen Vocalen, die ein jedes Wort haben muß, allzuviel Nebenbestimmungen der Regel geben würde. In meinen Princip. cogitandi habe ich S. 516. gezeigt, wie man die vier Buchstaben A, E, I, O; 64mal versetzen könne, daß allemal drey und drey zusammen kommen, und jeder Buchstabe drey mal, zweymal und einmal in einer Combination gesetzt werde. Auch dieses gründet sich auf die Combinations-Regel; denn man nehme zweyen Buchstaben a und b, so wird man nach dieser Regel 8 Versetzungen haben, nemlich

aaa, aab, aba, abb,

bbb, bba, bab, baa.

Drey Buchstaben a, b, c, werden 27 Versetzungen geben, 4 geben 64 u. s. w. Folglich läßt sich eine allgemeine Regel auch für diese Combinationen bestimmen; denn weil

Ob man finden könne, wie viel Wörter in einer Sprache möglich seyen.

Wie die Progression der Versetzungen fortgehe, wenn je drey und drey Buchstaben verbunden werden, und warum z. E. in der Vernunftlehre nicht weiter als 64 sogenannte modi oder Versetzungen der Buchstaben A, E, I, O, möglich seyen.

weil 8 der Cubus ist von 2, 27 der Cubus von 3, 64 der Cubus von 4, so wird die Anzahl der Versetzung nach den Cubiczahlen fortgehen; und 3. E. fünf Buchstaben sich 5. 5. 5mal oder 125mal, 6 Buchstaben 6. 6. 6 oder 216mal, und n, Buchstaben n. n. n mal n^3 mal nach der letzten Aufgabe versetzen lassen. Doch genug von diesem. Wir haben unsern Lesern schon einen Fingerzeig gegeben, wie sie auch in dieser Kunst zu erfinden sich üben können. Wir eilen zu dem folgenden Capitel, und tragen nunmehr auch die wichtige und schöne Lehre von der wirklichen Ausziehung der Wurzeln, nebst ihrer Verhältniß zu den Potenzen vollends vor, damit wir hernach die allgemeine und besondere Arithmetik zugleich beschliessen und zu Ende bringen können.

Beschluß
dieses
Capitels.



Fünftes Capitel.

Von wirklicher Ausziehung der
Wurzeln, sie mögen beschaffen
seyn, wie sie wollen, wie auch
von den algebraischen
Aufgaben.

Warum man
von Auszie-
hung der
Wurzeln be-
sonders noch
handle, und
was für ein
Unterschied
zwischen ih-
rer Anzeige
und wirkli-
chen Auszie-
hung über-
haupt seye.

§. 100.

Wir haben umständlich erzählt, was
Wurzeln und Potenzen seyn, da-
hero wir unsere Leser auf die schon erklärte
Namen und Ausdrücke blos zurückwei-
sen, und uns durch Wiederholung der
C. II. vorgetragenen Lehre in keine unnö-
thige Weitläufigkeit einlassen dürfen.
Weil aber zwischen der bloßen Anzeige ei-
ner Wurzel und zwischen der wirklichen
Ausziehung derselben ein grosser Unter-
schied beobachtet wird, so können unsere
Leser mit Recht von uns fordern, daß wir
ihnen eine Anweisung geben, wie sie die
Wurzeln von allen nur möglichen Poten-
zen wirklich ausziehen sollen. Dieser Ar-
beit ist nun das gegenwärtige Capitel ge-
wiedmet, in welchem wir zeigen werden,
wie die blos angezeigte Wurzeln z. E.

$\sqrt[n]{ax}$ oder $\sqrt[n]{5}$ oder $\sqrt[n]{x^m y}$ u. s. w. in wirk-
lichen bestimmten Grössen, wenn sie auch
unendliche Reihen geben sollten, ausge-
druckt werden können. Da nun leicht be-
greiff-

greifflich, daß manche Ausdrücke von der
 letztern Gattung vorkommen werden, so
 müssen wir diejenige Wurzeln, die in end- Warum eini-
 lichen Zahlen sich ganz ausdrücken lassen, ge Wurzeln
 von den andern, die eine unendliche lan- rational, aus
 ge Reihe von Brüchen geben, auch dem der irratio-
 Namen nach unterscheiden; jene heißt nal heißen,
 man deswegen Rational=Größen, diese und was diese
 aber Irrational=Größen. Bei diesem beide Namen
 letztern Namen müssen diejenige, welche bedeuten, auch
 gern alles deutsch geben wollen, sich hü- ob und wie
 ten, daß sie ihn nicht durch unvernünfti- man sie
 ge Größen übersetzen. Denn wie im la- deutsch aus-
 teinischen Rationator ein guter Rechen- drücken könnte.
 meister heißt, so wird eine Rational-
 Grösse diejenige seyn, die sich durch eine
 bestimmte Rechnung ausdrücken läßt;
 folglich ist eine Irrationalgrösse, welche
 man durch die gewöhnliche Rechenkunst
 nicht genau finden kann. So ist $\sqrt{4}$ eine
 Rationalgrösse; dann sie ist dem Ausdruck
 2 vollkommen und aufs genaueste gleich.
 Hingegen $\sqrt{2}$ ist eine Irrationalgrösse,
 weil ich die Wurzel in wirklichen Zahlen
 nicht genau geben kann, es sey dann, daß
 ich meine Arbeit in das unendliche fortset-
 ze; diß aber ist einem endlichen Geschöpfe
 unmöglich. Eben so giebt es auch einge-
 bildete Wurzeln, (radices imaginariæ,
 u. s. w. von denen wir im folgenden das
 nöthigste sagen werden.

Warum man
zuerst von
Ausziehung
der Quadrat-
wurzeln
handle.

Ursprung
des Na-
mens der
Quadrat-
wurzeln.

Eine Qua-
dratwurzel
kann entwe-
der aus ei-
nem oder
aus mehreren
Gliedern be-
stehen.

§. 101. Das erste Geschäftte besteht also darinnen, daß wir die Wurzeln wirklich ausziehen lernen. Wir haben bisher jedesmal das leichtere zuerst vorgetragen, ehe wir zu den schwerern Aufgaben uns gewendet. Eine gleiche Sorgfalt beobachten wir bey Ausziehung der Wurzeln. Nun lassen sich die sogenannte Quadratwurzeln am leichtesten vor allen andern ausziehen: darum wollen wir mit diesen den Anfang machen. Wenn ich eine Grösse mit sich selbst multiplicire, so heißt das Product ein Quadrat, weil es in der Geometrie ein wirkliches Quadrat giebt. Darum wird die mit sich selbst multiplicirte Zahl, oder in der Geometrie die mit sich selbst multiplicirte Linie, als eine Linie, in Rücksicht auf ihr Product, die Quadratwurzel genannt. Wie man sie durch bloße Zeichen ausdrücke, ist schon bekannt. Es ist also die Frage noch übrig, wie man sie in wirklichen Zahlen finden solle? und diese müssen wir jetzt beantworten. Eine Quadratzahl, das ist, die zweite Dignität oder Potenz einer Grösse, entsteht, wenn man eine Grösse mit sich selbst multiplicirt; nun kann die gegebene Grösse entweder aus einem Glied oder aus mehreren Gliedern bestehen, das ist, sie kann entweder einfach oder zusammengesetzt seyn, folglich a oder $a + b$ u. s. w. heißen. Heißt sie a allein, so ist ihr Quadrat oder ihre zweite Po-

Potenz a^2 ; folglich ist a die Quadratwurzel von dem Quadrat a^2 ; das hat keine Schwürigkeit. Heißt sie aber $a + b$, so muß man das Quadrat oder die zweite Potenz erst durch die Multiplication suchen; da dann $a + b$ die Quadratwurzel von $(a + b)^2$ seyn wird. Das Quadrat selbst wird ohne sonderliche Mühe gefunden. Man multiplicirt eben $a + b$ mit sich selbst, da dann herauskommt

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ ab + b^2 \\ \hline \end{array}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Demnach besteht das Quadrat einer Wurzel von zwey Gliedern, welche man eine binomische Wurzel nennet, aus dem Quadrat des ersten Gliedes, (a^2), ferner aus dem Quadrat des andern Gliedes (b^2), und aus dem doppelten Product der beeden Glieder ($2ab$).

Allgemeiner Ausdruck der wirklichen Quadrate, deren Wurzeln aus zwey Gliedern bestehen,

Dieses ist der allgemeine Ausdruck für alle Quadrate; dann entweder besteht die Wurzel aus wenigern oder aus mehr Gliedern. Besteht sie aus wenigern, so kann sie allemal in zwey Glieder vertheilt werden. Z. E.

Warum dieser Ausdruck für alle mögliche Quadrate auch von mehreren und wenigern Gliedern sich schicke; und wie eine jede einfache Wurzel in zwey Glieder

$3 = 2 + 1$, $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ u. s. w. Besteht sie aus mehreren, so läßt sie sich auf zwey reduciren; dann $a + b + c = (a + b) + c$; oder in Zahlen $324 =$

258 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

vertheilt, und eine von mehr Gliedern auf zwey reducirt werden könne.

Wie man in Buchstaben die Quadratwurzel wirklich ausziehe?

Auflösung

und

Beweis.

$300 + 20 + 4 = 320 + 4$ u. s. w. Hieraus ist klar, daß der Ausdruck $a^2 + 2ab + b^2$ alle mögliche Quadratzahlen bedeuten könne. Wenn ich also eine Quadratwurzel ausziehen will, so muß ich eine Zahl finden, die mit sich selbst multiplicirt dem Ausdruck $a^2 + 2ab + b^2$ gleich wird. Weis ich nun die Kunst, aus $a^2 + 2ab + b^2$ die Quadratwurzel auszuziehen; so werde ich eine allgemeine Regel wissen, wornach ich mich in Ausziehung aller Quadratwurzeln richten kann. Ich will es dahero versuchen, und die Wurzel aus dem obigen Ausdruck wirklich ausziehen. Die Wurzel von a^2 ist a , dann a mit a multiplicirt giebt aa ; wie finde ich aber b , das andere Glied der Wurzel? Ich sehe in dem Fundamental-Ausdruck, daß $2ab = 2a \cdot b$; folglich auch, daß $b = \frac{2a \cdot b}{2a}$; Das zweite Glied der Wurzel wird also gefunden, wenn man das nach dem subtrahirten Quadrat des ersten Gliedes unmittelbar folgende Product durch das doppelt genommene oder mit 2 multiplicirte erste Glied der Wurzel dividirt, und sodann das Product des neuen Quotienten in den Divisor nebst dem Quadrat des zweiten Gliedes von der Zahl, woraus man die Quadratwurzel ausziehen will, subtrahirt. Denn es ist:

der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 259

$$\begin{array}{r}
 aa + 2ab + bb \quad | \quad a + b \\
 aa \quad \quad \quad | \\
 \hline
 2ab + bb \\
 (2a) \\
 2ab + bb \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

S. 102. Nach dieser Regel werde ich nun leicht in wirklichen Zahlen die Quadratwurzel finden können, wenn ich mir vorhero ein Wurzelstäfelein mache, worinnen alle Quadrate bis auf neune vorkommen. Wir nehmen die Cubiczahlen mit darzu, weil wir auch nächstens die Ausziehung der Cubicwurzeln zeigen werden, und so dann nicht nöthig haben, die Tafel doppelt herzusetzen:

Wie man die Quadratwurzeln in Zahlen nach dem gegebenen allgemeinen Beweis finden könne.
Was das Wurzelstäfelein seye.

Wurzeln	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
Quadratzahlen	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81
Cubiczahlen	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729

Aus dieser Tafel sehen wir, daß das größte Quadrat der einfachen Zahlen nur aus zwey Zahlzeichen bestehe, und daß es auch einige Quadrate gebe, die sich nur durch ein einiges Zahlzeichen ausdrücken lassen. Solalich begreift man die Regel, kraft deren man eine Quadratzahl von der Rechten zur Linken in Classen eintheilt, und je

Warum man bey Ausziehung der Wurzeln dieser Gattung die Quadratzahl in Classen eintheile, und jeder Classe nur zwey Zahlzeichen

R 2 der

den, und der
letzten Classe
zur Linken zu-
weilen nur
ein Zahlzei-
chen zugeben
dürfe;

nebst einer
vorläufigen
Anzeige, war-
um man den
Classen der
Cubiczahlen
nicht mehr
als drey, am
Ende aber
auch nur 2
oder gar ein
Zahlzeichen
geben dürfe.

Exempel von
Ausziehung
der Quadrat-
wurzel, wenn
nichts übrig
bleibt.

der Classe zwey Zahlzeichen, der letzten zur Linken aber auch nur eins geben darf, wenn nemlich die Anzahl der Zeichen im Quadrat ungleich ist. Denn wie das einmal Eins nur bis auf neune zu wissen nöthig ist; so hat man auch bey den Quadraten nicht weiter zu wissen nöthig, weil die über neune hinausgehende Wurzeln als Wurzeln von zwey Gliedern angesehen werden. Eben so siehet man, daß die größte Cubiczahl von den einfachen Zahlen nicht weiter als drey Zeichen bekommt; folglich wird man jezo schon die andere Regel vorläufig begreifen, daß man nemlich bey Ausziehung der Cubiczahlen die gegebene Zahl in solche Classen eintheilen müsse, deren jede drey Zahlzeichen bekommt, die letzte zur Linken aber auch eins oder zwey haben kann, weil es auch Cubiczahlen von einem oder zwey Zahlzeichen giebt. Um nun ein Exempel von Ausziehung der Quadratwurzel zu geben, so wollen wir die Zahl 119025 dazu nehmen, und sie erstlich in Classen eintheilen, hernach durch die allgemeine Regel §. 101. die Wurzel suchen. Die Operation ist die folgende:

der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 261

$$\begin{array}{r|l}
 11 & 90 \mid 25 \mid 345 \\
 9 & : \\
 \hline
 2 & 9.0 : \\
 & (64) \\
 256 & : \\
 \hline
 34 & 25 \\
 & (685) \\
 34 & 25 \\
 \hline
 \end{array}$$

0.

Ich habe erstlich die ganze Zahl in Classen von der Rechten zur Linken getheilt, und jeder Classe zwey Zahlzeichen gegeben. Hernach habe ich von der äussersten Classe zur Linken das nächst kleinere Quadrat, welches 9 ist, abgezogen, und die Wurzel von 9, welche 3 ist, dahin gesetzt, wo man die Quotienten bey der Division hinsetzt, den Rest von $11 - 9 = 2$ aber, wie bey der unter sich gehenden Division bemerkt, so dann die folgende Classe auf gleiche Weise heruntergesetzt, ferner den neuen Divisor, 2a, das ist im Exempel $2 \cdot 3 = 6$ gesucht, und unter das erste Zahlzeichen zur Linken der folgenden Classe geschrieben, auch wirklich dividirt; da sich dann der Quotient 4 gegeben hat. Weil ich ferner das Product $2ab + b^2$ das ist, im Exempel $6 \cdot 4 + 4^2$ von den obern Zahlen nach der Regel §. 101. abziehen mußte, und $2ab + b^2 = (2a + b) \cdot b$ §. 60, oder im Exempel $6 \cdot 4 + 4^2 = (6 + 4) \cdot 4$, so durfte ich, die Rechnung zu

Vollständige Erklärung des gegebenen Exempels.

Wie man das zweyte Glied der Wurzel finde, und warum der Divisor, wodurch es gefunden wird, das erste Glied doppelt genommen seyn müsse.

Warum man den gefundenen neuen Quotienten nur zum Divisor hinsetzen, und hernach alles mit dem

neuen Quotienten multipliciren, und das Product von der correspondirenden Classe abziehen dürfen.

Fortsetzung der Operation, und wie der gefundenen ganze Quotient, das ist, das erste und zweite Glied der Wurzel, zusammen genommen, als das erste Glied angesehen werde, wenn die Wurzel mehr Glieder hat.

Worauf man zu sehen habe, daß man den Quotienten nicht zu groß nehme.

verkürzen, sogleich den vlerer zum sechser hinsetzen, und hernach das ganze Product 64 mit 4 multipliciren, und dieses neue Product von nächst obigen Zahlen, welche zum Unterschied in keine \circ wie das erste Product eingeschlossen sind, abziehen; da ich dann zum Rest, abermal die folgende Classe herabsetze. Nun suche ich wiederum einen neuen Divisor, und betrachte meine Wurzel 34 als 2, folglich reducire ich die Operation auf die vorige Regeln, und sage, $2a = 2 \cdot 34 = 68$ ist der neue Divisor, welcher unter die zu dividirende Zahl so geschrieben wird, daß sein letztes Zahlzeichen 8 unter das erste Zahlzeichen der folgenden Classe, nemlich unter den Zweyer, zu stehen kommt. Hernach dividire ich wirklich, muß mich aber zugleich hüten, daß ich den Quotienten nicht zu groß nehme, weil das folgende Quadrat b^2 auch noch von der zu dividirenden Zahl abgezogen wird. Der Quotient im Exempel ist 5, diesen setze ich wieder zum Divisor, und multiplicire die ganze Zahl mit 5, weil, wie wir schon gesagt haben, $(68 + 5) \cdot 5 = 68 \cdot 5 + 5 \cdot 5$ und neben her wegen der Decimalprogression, indem 68 eigentlich $600 + 80$ ist, der Ausdruck $(68 + 5) \cdot 5 = (600 + 80 + 5) \cdot 5 = 685 \cdot 5$. Wann nun nach geschener Subtraction des letzten Products nichts mehr übrig bleibt, so hat man die Quadratwurzel genau gefunden,

den, welche im gegebenen Exempel 345 ist. Will man die Probe machen, so darf man nur die gefundene Wurzel mit sich selbst multipliciren, da dann das Product der gegebenen Quadratzahl gleich seyn muß, wofür man recht gerechnet hat.

Wie man die Probe, ob man recht gerechnet habe, machen könne.

§. 103. Es kann aber auch geschehen, daß sich die Quadratwurzel nicht genau ausziehen läßt, und am Ende noch ein ziemlicher Rest übrig bleibt. Bey diesem Fall nun fragt man billig, wie man es dann anzugreifen habe, daß man die wahre Quadratwurzel wenigstens so nahe, als möglich und zur Noth hinlänglich ist, finden könne? Man begreift leicht, daß es dergleichen Zahlen die Menge gebe, und daß, wenn man genau seyn wolle, eine Menge von Brüchen dinstfalls zum Quotienten kommen müsse. Weß aber die Rechnung mit den Brüchen so gar weitläufig und beschwerlich ist, und sie doch bey dieser Operation von einem genauen Rechenmeister nicht vermieden werden können; so hat man Decimalbrüche, deren Nenner in der geometrischen Progression von 1, 10, 100, 1000 u. s. w. fortgehen, dazu erwählt, welche nicht nur vor allen andern am kürzesten sich ausdrücken lassen, sondern auch bey der gegenwärtigen Rechnung von selbst sich geben. Wir wollen die Sache zuerst durch ein Exempel erläutern, ehe wir die Regeln selbst anführen

Wie man es anzugreifen habe, wenn sich die Wurzel nicht genau ausziehen läßt, und am Ende noch ein Rest übrig bleibt,

und wie es dinstfalls eine unendliche Reihe von Brüchen geben müsse;

warum man vorzüglich Decimalbrüche dazu erwählt, und was Decimalbrüche seyen;

264 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

Exempel von
solcher Rech-
nung.

und erweisen. Man solle die Quadrat-
wurzel aus 3 ausziehen. Wir setzen also
nach den bekannten Regeln

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 1 \overset{732}{000}} \\ 1 \overline{) } \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2. \overline{) 0.0} \\ (27) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 89 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11. \overline{) 0.0} \\ (3 \overline{) 43} \\ 1029 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7.1. \overline{) 0.0} \\ (3 \overline{) 462} \\ 6924 \end{array}$$

$$1 \quad 76 \overline{) 00} \text{ u. s. w.}$$

Erklärung
des Exempels.

Warum man,
so bald die
Brüche an-
gehen, dem
Rest zwey
Nullen an-
hängen müs-
se, und wie
aus diesem
Rest der Zeh-
ler des zu ex-
trahirenden
Bruchs ge-
funden werde.
Warum man
den Nenner
nur im Sinne
ausziehe, und

Denn ich sage: das nächst kleinere Qua-
drat von 3 ist 1, und seine Wurzel ist
gleichfalls 1; 1 von 3 läßt 2. Zu diesem
Zweyer setze ich zwey Nullen, welche
gleichsam die folgende Classe ausmachen;
damit ich aber nicht mehr herausbringe,
als ich verlange, so setze ich unter 200 im
Sinn den Nenner 100, da dann $\frac{200}{100} = 2$.
Aus diesem unächten Bruch ziehe ich die
Wurzel aus; und zwar aus dem Nenner
100, davon die Quadratwurzel allemal
10 ist, (weil $10 \cdot 10 = 100$) nur im
Sinne, damit ich nicht so viel schreiben
dürfe; die Wurzel des Nenners setze ich
wirklich nach dem Divisionszeichen als den
Nen-

Der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 2 65

Nenner des Bruchs, dessen Zehler ich also das Quadrat des Nenners nicht nach der allgemeinen Regel nun suchen muß. Der Divisor 2a ist hier $2 \cdot 1 = 2$; wirklich ist 2 in 20 7 mal enthalten; (dann öfter, wenn dürfen malen kann ich ihn wegen den zu subtrahirenden Produkten §. 103. nicht nehmen) folglich ist 7 der Zehler zu dem ersten Bruch. Diese Zahl setze ich, wie in der ersten Operation, zum Divisor herunter, und sage, 7 mal 7 giebt 49; dahero werden 9 gesetzt, und 4 behalten; ferner 2 mal 7 giebt 14, und 4 behalten giebt 18. Das Product 189 ziehe ich von 200 ab; und dividire den Rest aufs neue durch 2a, welche in diesem Fall $= 2 \cdot 17 = 34$ nach §. 102. Ich muß aber dem Rest vorher wieder zwei Nullen anhängen, und aus dem abermaligen darunter verstandenen Nenner 100 die Wurzel 10 im Sinn ausziehen, und nach dem Divisionszeichen als den Nenner des Bruchs setzen, da ich dann nur eine Null dem vorigen Nenner anhängen darf, und sodann den Zehler 3 nach der allgemeinen Regel suchen muß u. s. w. Die Ursache ist leicht begreiflich. Eine jede ganze Zahl kann als ein Bruch angesehen werden, dessen Nenner eins ist. So ist $6 = \frac{6}{1}$, $18 = \frac{18}{1}$ u. s. w. folglich wird auch $6 = \frac{600}{100}$, und $18 = \frac{1800}{100}$ u. s. w. §. 65. 66. Demnach darf ich die nach Ausziehung der Wurzel übrig gebliebene Zahlen als Brüche ansehen, deren Nenner

Fortsetzung der Operation.

Umständlicher Beweis dieser Rechnung.

wie man aus Brüchen die Wurzeln ausziehe,

und wie eine jede Wurzel durch einen unächten Bruch ausge- druckt wer- den könne.

Anwendung dieses Satzes auf die vor- getragene Rechnung.

Wie weit man die Ope- ration fort- setzen solle; und was die Approxima- tion seve.

Warum man, so oft ein neuer Zehler gesucht wird, zwei Nullen weiter an- hängen müsse,

und wie aus der Natur der Decimal-

ner 1 ist, und daher auch den ganzen Bruch mit einer dritten Zahl, z. E. mit 100 multipliciren, ohne daß die Grösse des Bruchs geändert würde. Wie nun z. E. die Quadratwurzel aus $4 = 2$, so wird, weil $\frac{400}{100} = 4$, die Quadratwurzel daraus $= \frac{20}{10} = 2$ seyn. Folglich muß ich beedes aus dem Nenner und Zehler die Wurzel ausziehen: jenes, weil es leicht ist, und man des vielen Schreibens gerne entübriget ist, thue ich bey der vorhabenden Operation im Kopf; dieses aber nach der allgemeinen Regel auf dem Papier, und fahre mit der Multiplication durch 100 so lange fort, bis ich glaube, ich fehle nunmehr kaum noch um 1 Million, oder Billiontheilchen u. s. w. Das heißt man nun die Wurzel durch die Approximation suchen, weil man ihrem wahren Ausdruck in wirklichen Zahlen dadurch immer näher kommt. Das erstemal erhält man also Zehentheile, das zweitemal Hunderttheile, das drittemal Tausendtheile, u. s. w. weil, so oft die Approximationsrechnung wiederholt wird, allemal zwey Nullen weiter angehängt werden, und bekannter massen $\sqrt{100} = 10, \sqrt{10000} = 100, \sqrt{1000000} = 1000$ ist, u. s. w. Da nun $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} = \frac{11}{100}$, oder $\frac{a}{10} + \frac{b}{100} = \frac{10a+b}{100}$ §. 67. so siehet man leicht, warum man im Quo- tienten zu dem Nenner bey jedesmaliger Operation nur eine Null, und zum Zeh-
ler

der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 267

ler die gefundene neue Zahl hinzusetzen, brüche erhel-
und im vorgegebenen Exempel anstatt $\frac{7}{10}$ le, daß man
+ $\frac{3}{100}$ schreiben dürfe $\frac{73}{100}$ u. s. w. Denn dem Quotienten
wenn man sie wirklich unter einerley Be- ners jedesmal
nennung bringt, so kommt keine andere nur eine Null-
Zahl, als die bereits ausgedruckte heraus. dürfe.

§. 104. Eine Cubiczahl entsteht, wenn von Auszie-
man eine Zahl drey mal mit sich selbst mul- hung der Cu-
tiplicirt. Z. E. aaa oder a^3 oder 3. 3. 3 bicwurzeln.
= 27 sind Cubiczahlen. Diese Potenzen
werden deswegen Cubiczahlen genannt, Ursprung des
weil in der Geometrie eine drey mal mit sich Namens
selbst multiplicirte Linie einen gleich hohen, der Cubic-
breiten und langen Körper giebt, den man zahlen.
einen Cubus nennet. Nun müssen wir
auch wissen, wie man Cubiczahlen wirk-
lich ausziehe: dann die Quadrat- und Cu-
biczahlen kommen am öftesten vor. Eine
Cubicwurzel ist diejenige Zahl, die mit Wie man
sich selbst drey mal multiplicirt, die Cubic- aber Cubic-
zahl giebt; so ist 2 die Cubicwurzel von 8, wurzeln auf
3 die Cubicwurzel von 27 u. s. w. zwey Glieder
Nun könne. reduciren.
fragt man, wie man diese Wurzeln wirk-
lich finden solle? Sie können alle, wie die
Quadratwurzeln, aus zwey Gliedern be-
stehen; folglich wollen wir die Operation
abermal auf die binomische Wurzeln, dann
so nennt man die aus zwey Gliedern be-
stehende Wurzeln, reduciren. Wir wol-
len also $a + b$ zu dem allgemeinen Aus-
druck aller Wurzeln machen, und ihn drey-
mal mit sich selbst multipliciren, so werden
wir bekommen

$$a + b$$

Allgemeiner
Ausdruck für
alle Cubic-
zahlen nebst
der Regel, die
daraus fließt.
set.

$$\begin{array}{r}
 a + b \\
 a + b \\
 \hline
 a^2 + ab \\
 \quad ab + b^2 \\
 \hline
 a^2 + 2ab + b^2 \\
 \quad a + b \\
 \hline
 a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
 \quad a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
 \hline
 a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
 \end{array}$$

Dies ist der Ausdruck für alle Cubiczahlen, welchen man deswegen, wie auch den Ausdruck für die Quadratzahlen, billig auswendig lernen und behalten sollte. Wir sehen hieraus, daß eine jede Cubiczahl in sich enthält den Cubus des ersten Glieds, hernach das dreymal genommene Product des zweyten Gliedes in das Quadrat des ersten, ferner das dreymal genommene Product des ersten Gliedes in das Quadrat des zweyten, endlich den Cubus des dritten Gliedes. Wenn ich also die Cubicwurzel wirklich ausziehen will, so suche ich in dem Wurzeltafel ein die Cubicwurzel des ersten Gliedes, welches leicht zu finden ist. Hernach bemühe ich mich auch, das zweite Glied zu bekommen. Dieses läßt sich finden, wenn man den nach Abzug des ersten Cubus vom ersten Glied übriggebliebenen Rest durch $3a^2$, das ist, durch das dreysfache

Wie man die
Cubicwurzel
wirklich aus-
ziehe?

Auflösung
und
Beweis;

fache Quadrat des ersten Gliedes dividirt,
(weil $3a^2b = 3a^2 \cdot b$, folglich $b = \frac{3a^2 \cdot b}{3a^2}$)

hernach die noch übrige Producte nach und nach subtrahirt, und die Operation so lange fortsetzet, bis man die Wurzel entweder genau, oder doch so genau, als möglich ist, erhält.

§. 105. Ein Exempel in Zahlen wird Exempel in die Sache deutlich machen. Weil die wirklichen größte Cubuszahl von den einfachen Zahlen, wenn Zahlen nicht über drey Zahlzeichen in sich begreift, so giebt man den Classen, darein nichts übrig sie getheilt werden, drey Zahlzeichen, doch bleibt. so, daß in der letzten zur Linken auch eins oder zwey übrig bleiben können. §. 101. Hernach sucht man den nächstkleinern Cubus, welcher der äußersten Classe zur Linken correspondirt, ziehet ihn von den Zahlen dieser Classe ab, und setzet die Wurzel davon hinter das Divisionszeichen; welche hernach das erste Glied der ganzen Wurzel ist. Den abgezogenen Rest dividirt man durch das drehmal genommene Quadrat dieser erst gefundenen Wurzel, damit man das zweite Glied bekomme, u. s. w. Z. E.

270 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

$$\begin{array}{r}
 47 \overline{) 437 \overline{) 928}} \overline{) 362} \\
 \underline{a^3 = 27} \\
 20 \overline{) 437} \\
 \text{Divisor } 3a^2 = (27) \\
 \text{Partial-} \left\{ \begin{array}{l} 3a^2b = 162 \\ \text{producte } 3ab^2 = 324 \\ b^3 = 216 \end{array} \right. \\
 \hline
 \text{Ihre Summe} = 19656 : \\
 \hline
 \text{Rest} = 781 \overline{) 928} \\
 \text{Neuer Divisor, in welchem } a = 36; \text{ folglich} \\
 3a^2 = (388 \overline{) 8}) \\
 \text{Partial-} \left\{ \begin{array}{l} 3a^2b = 777 6 \\ \text{producte } 3ab^2 = 432 \\ b^3 = 8 \end{array} \right. \\
 \hline
 \text{Ihre Summe} = 781928 \\
 \hline
 \text{Rest} 0.
 \end{array}$$

Erklärung
des gegebenen
Exempels;
warum der
Divisor alle-
mal das
dreyfache
Quadrat des
ersten Gliedes
seye,

warum das
letzte Zahlzei-
chen des er-

Denn ich sage, der nächstkleinere Cubus von 47 ist 27, seine Wurzel 3; 27 von 47 lassen 20, zu diesem Rest setze ich die folgende Classe herab. Der Divisor muß $3a^2$ seyn, folglich $3 \cdot 3^2 = 3 \cdot 9 = 27$, welcher so unterschrieben wird, daß sein letztes Zahlzeichen unter das erste der herabgesetzten neuen Classe zu stehen kommt. 27 in 204 ist 6 mal enthalten. Weil nun 27 schon $3a^2$ ist, so bekomme ich $3a^2b$ wenn ich 27 oder den Divisor mit b oder dem gefundenen neuen Quotienten 6 multiplicire; das Product schreibe ich

der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 271

ich also, daß sein letztes Zahlzeichen unter ^{sten Products} das erste der herabgesetzten Classe zu ste- ^{unter das} hen kommt. Denn es sind weder Ein- ^{erste der fol-} heiten noch Zehner, sondern Hunderter. ^{genden Classe,} Das andere Product $3ab^2$ muß ich auf einem Nebenblättlein berechnen, wenn ich es nicht im Kopf genau ausfinden kann; dieses Product $3 \cdot 3 \cdot 6^2 = 3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 = 324$ und des schreibe ich dergestalten, daß sein letztes ^{zweiten Pro-} Zahlzeichen unter das mittlere der herab- ^{ducts unter} gesetzten Classe gesetzt wird; denn es sind ^{das mittlere,} Zehner, folglich ist es eben so viel, als wenn eine Null noch angehängt wäre. Den Cubus des zweiten Glieds $b^3 = 6^3$ ^{des letzten} $= 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ setze ich endlich also un- ^{aber, oder} ^{des Cubus} ^{von b. unter} ^{das letzte zu} ^{stehen kom-} ^{me.} ^{Wie man den} ^{neuen Divi-} ^{for finde, und} ^{wie in diesem} ^{Fall abermal} ^{der ganze} ^{Quotient für} ^{das erste} ^{Glied ange-} ^{sehen werde.} ^{Der} ^{abgezogene Rest wird aufs neue nach eben} ^{dieser Methode dividirt; nur muß man} ^{diesfalls den ganzen Quotienten, das ist} ^{im Exempel 36 für das erste Glied an-} ^{nehmen; folglich wird der neue Divisor,} ^{in welchem $a = 36$, heißen $3 \cdot 36^2 =$} ^{$3 \cdot 36 \cdot 36 = 3888$.} ^{Da denn die Divi-} ^{fion}

sion und hernach die Abziehung der summirten Partialproducte, wie in der ersten Operation, geschieht.

Wie man die Sache angreiffe, wenn etwas übrig bleibt, folglich die Wurzel sich nicht genau finden läßt.

Beantwortung der Frage, nebst einem Exempel.

§. 106. Sollte die Wurzel nicht genau herauskommen und nach geschene Operation noch was übrig bleiben, so hängt man dem Rest drey Nullen an, und zieht wie bey der Quadratwurzel aus dem im Sinn behaltenen Nenner 1000 die Cubicwurzel aus, welche allemal 10 ist, (weil $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$) setzt sie als den Nenner des Bruchs, dazu man den Zehler finden will, in die Stelle des Quotienten, und verfährt mit dieser Rechnung so lange, bis man glaubt, der Fehler seye so klein, daß man ihn fast übersehen dürfe. Die Operation selbst und der Beweis ist vollkommen einerley mit demjenigen, was wir bey den Quadratwurzeln gesagt haben; wenn man nur jedesmal, statt zwey, drey Nullen anhängt, und hernach die allgemeine Regel von Ausziehung der Cubicwurzel dabey jedesmal anbringt. Wir lassen es dahero bey einem bloßen Exempel bewenden, damit wir nicht allzuweitläufig werden. Man solle aus 12 die Cubicwurzel ausziehen. Wir setzen also nach der Regel

$$\begin{array}{r}
 12 \overline{) 21000} \\
 \underline{8} \\
 4000 \\
 \underline{32000} \\
 8000
 \end{array}$$

Divisor $3a^2 = (12)$
 Partial-Producte $\begin{cases} 3a^2b = 24 \\ 3ab^2 = 24 \\ b^3 = 8 \end{cases}$
 ihre Summe $= 2648$
 neuer Divisor in welchem $3a^2 = (145 \overline{) 2})$ u. s. w.
 $a = 22.$

Dann ich sage, der nächste Cubus von 12 ist 8, seine Wurzel 2; 8 von 12 lassen 4; 4 mit 1000 multiplicirt, ist 4000, oder 4 mit 3 Nullen vermehrt. Aus dem im Sinn behaltenen Nenner 1000 ist die Cubicwurzel 10; der Divisor, durch welchen ich den Zehler finde, ist $3a^2 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. u. s. w. Unsere Leser sehen nun zur Genüge, daß die Approximation, wie diese Operation genannt wird, durch die Multiplication der übrig gebliebenen Zahlen in einen Bruch, dessen Zehler und Nenner gleich sind, erhalten werde. Dieser Bruch könnte nun auch ein anderer seyn, z. E. bey Quadratzahlen, $\frac{25}{25}, \frac{16}{16}, \frac{9}{9}$ u. s. w. bey Cubiczahlen $\frac{8}{8}, \frac{27}{27}$ u. s. w. wenn nur allemal der Nenner ein vollkommenes Quadrat oder Cubus bleibt; weil es sonst immer

Warum man dem Rest in diesem Fall 3 Nullen anhängt, und wie diese Operation sowohl bey Quadrat- als Cubiczahlen, eine Erfindung der Wurzel durch die Approximation heiße.

Beweis, daß das Anhängen der Nullen willkürlich seye, und man statt derselben auch neue

andern Qua-
drat- oder
Cubiczahlen
multipliciren
könnte;

warum aber
doch die Mul-
tiplication
durch die De-
cimalpro-
gression, oder
das Anhän-
gen der Null-
len, die schick-
liche Metho-
de seye.

Probe der
bisherigen
Operation.

Ob man die
Ausziehung
der Cubic-
wurzel leicht-
er machen
konne;

Exempel ei-
nes ungenann-
ten, der vor-
gab, er habe
eine leichtere
Methode
zum Behuf
des Gedäch-
nisses in eini-
ge lateinische
Verse ver-
faßt,

neue Brüche statt des Nenners geben wür-
de. Man begreift aber von selbst, daß
in diesem Fall die übrige Zahlen jedesmal
wirklich mit dem Zehler multiplicirt wer-
den müßten; folglich würde man ungleich
mehr Mühe und Zeit brauchen, als man
durch die Multiplication mit 100 braucht;
anderer Vortheile besonders mit den Decio-
malbrüchen, zu geschweigen. Es ist also
die eingeführte Approximationsmethode die
allerschicklichste und bequemste, die man
nur immer in wirklichen Zahlen erfinden
konnte. Will man endlich die Probe ma-
chen, so darf man nur den gefundenen
Quotienten dreymal mit sich selbst multi-
pliciren; und zum Product den Rest, wenn
einer übrig geblieben ist, noch addiren.

§. 107. Die Ausziehung der Cubic-
wurzeln ist bey allen Vortheilen, die man
dabey anbringt, doch ungleich mühsamer
als die Ausziehung der Quadratwurzel.
Man hat dahero auf allerhand Mittel ge-
sonnen, die Sache zu erleichtern. Ich
will eines anführen, welches aber nur den
jungen gefallen wird, welche lieber einige
schlechte lateinische Verse als eine weit kür-
zere algebraische Formel auswendig lernen
wollen. Die ganze Kunst, die Cubicwur-
zel zu finden, hat ein Ungenannter in fol-
gende Verse gebracht, welche aber einen
Commentarius nöthig haben. Sie helfe-
sen:

Radix

Der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 275

Radix tota quadret, triplum divisor
habebit:

Tripletur quotus, factum ducatur in
ante,

In stantes duc hoc, quoti cubus ad-
ditur extra.

Der erste Vers gehet den Divisor allein Erklärung
an, und zeigt, daß man ihn bekomme, der angeführte
wenn man allemal die ganze Wurzel qua- ten lateinische
drirt, und das Quadrat davon dreymal schen Verse,
nehme. Das heißt $3a^2$. Die zweien fol-
gende Verse gehen auf die Summe der
Partialproducte, und wollen, man solle
den neuen Quotienten mit 3 und sodann
wieder mit dem vorher gefundenen Quo-
tienten multipliciren, und dieses Product
noch einmal in alle hinter dem Divisions-
zeichen stehende Zahlen, multipliciren, und
hernach den Cubus des neuen Quotienten
so dazu addiren, daß sein letztes Zahlzeichen
eine einzechte Stelle zur Rechten bekommt,
oder daß die Einheiten des Products zu den
Zehnern des neuen Cubus u. s. w. addirt
werden. Z. E. in dem §. 105. gegebenen
Exempel ist das erste Product $19656 =$ und Anwen-
(3. 6) $3 \cdot 36 (+ 216 \text{ extra additum.})$ dung auf ein
Das ist, wenn man wirklich multiplicirt Exempel,
 $54 \cdot 36 = 1944$ Das zweite Product
 $+ 216$ in eben diesem Exem-
 $\underline{19656}$ pel nemlich 781928
wird nach den Vers-
regeln

276 Urichm. V. Cap. Von Ausziehung

regeln seyn: $3 \cdot 2 \cdot 36 \cdot 362 + 8$ extra additum, dann $3 \cdot 2$ heißt tripletur quotus, und $3 \cdot 2 \cdot 36$. factum ducatur in ante, und $3 \cdot 2 \cdot 36 \cdot 362$. in stantes duc hoc. Das ist, wenn man wirklich multiplicirt 78192, und der Cubus des letzten Quotienten 8, qui extra additur, macht 781928. Wer das extra addiren nicht recht versteht, der darf nur das ganze Product mit 10 multipliciren, und hernach den letzten Cubus nach den gewöhnlichen Additionsregeln addiren, welches der ungenannte Verfasser dieser Regel vielleicht gesagt hätte, wenn sich in den Vers geschickt hätte, oder wenn er nicht lieber etwas ungewöhnliches hätte sagen wollen. Doch genug hiervon. Ich habe meinen Lesern nur eine Probe geben wollen, wie man auch Regeln habe, welche eben nicht allemal das Sinnreiche und Witzige mit dem Gründlichen verbinden.

Beurthei-
lung dieser
Methode.

Vorbereit-
ung zu New-
tons Regel,
die Wurzeln
aus höhern
Potenzen zu
extrahiren,
nebst einer
kurzen aber
gegründeten
Nachricht
von dem
ruhmvollen
Leben dieses
grossen Geis-
tes.

§. 108. Nunmehr aber kommen wir auf eine Regel, welche ihrem Erfinder die größte Ehre macht. Man hat sie dem grossen Newton zu danken, einem Manne, welcher, wie man aus seiner Lebensgeschichte weiß, neben seinen ausserordentlichen Gaben und Einsichten, durch die Furcht des HErrn, welche er zum Anfang seiner Weisheit gemacht hat, allen Liebhabern der wahren Weisheit noch weit verehrungswürdiger wird, als er der blos gelehr-

gelehrten Welt durch die Stärke seines Geistes nur immer werden konnte. Ich würde mich bey dem Lob dieses Gelehrten in Rücksicht auf seinen Gottgefälligen Wandel noch weiter ausbreiten, wenn ich es nicht schon in meinen Betrachtungen über die Absichten der Religion gethan hätte. Jezo genüget mir, diese Anmerkung noch zu machen; daß die größte Gelehrten nicht nur die beste Christen seyn können, sondern daß auch das wahre Christenthum den gründlichen Wissenschaften ungemein aufhilft. Die Newtonische Erfindung, davon wir jeko reden wollen, besteht in einer allgemeinen Regel, nach welcher man die Grössen zu allen beliebigen Potenzen theils erheben, theils aus denselbigen die verlangte Potenzen wirklich ausziehen kann. Dann es giebt bekannter massen noch mehr höhere Potenzen, als blos Cubic und Quadratzahlen. Wir müssen daher auch zeigen, wie man mit diesen umgehen solle. Unsere Leser wissen schon, wie man eine Grösse mit sich selbst multiplicirt. Wenn man daher die Cubiczahl $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ nochmalen mit $a + b$ multiplicirt, so bekommt man die vierte Potenz $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; und wenn man diese Potenz nochmalen mit $a + b$ multiplicirt, so bekommt man die fünfte Potenz u. s. w. wie unsere Leser von selbst auf einem Nebenblättlein die Berechnung machen können.

Worinnen die Newtonsche Erfindung in Rücksicht auf die Wurzeln und Potenzen bestehe.

Wie die Potenzen der binomischen Wurzeln nach den ordentlichen Multiplicationsregeln gefunden werden.

Tafel der Potenzen von der ersten bis zur siebenden Potenz.

S. 109. Zu dem Ende wollen wir eine Tabell bis auf die siebende Potenz her-
setzen, damit unsere Leser sehen, nach wel-
chen Gesetzen die Glieder der Potenzen stei-
gen und abnehmen:

1a	1b					
1a ²	2ab	1b ²				
1a ³	3a ² b	3ab ²	1b ³			
1a ⁴	4a ³ b	6a ² b ²	4ab ³	1b ⁴		
1a ⁵	5a ⁴ b	10a ³ b ²	10a ² b ³	5ab ⁴	1b ⁵	
1a ⁶	6a ⁵ b	15a ⁴ b ²	20a ³ b ³	15a ² b ⁴	6ab ⁵	1b ⁶
1a ⁷	7a ⁶ b	21a ⁵ b ²	35a ⁴ b ³	35a ³ b ⁴	21a ² b ⁵	7ab ⁶
						1b ⁷

**Allgemeine
Anmerkung,
die Potenzen
oder Digni-
täten der
Glieder be-
treffend;
nemlich die
Dignitäten
des einen
Gliedes neh-
men ab, wie
die Dignität-
en des an-
dern zuneh-
men.**

Aus dieser Tabelle ſiehet man ſchon, daß die Exponenten des zweiten Glieds abnehmen, wie die Exponenten des erſten Glieds zunehmen. Wenn man alſo zwei Progreſſionen, davon die eine in eben dem Verhältniß abnimmt, in welcher die andere ſteigt, untereinander ſchreibt, ſo werden die beiderſeltige Producte die Glieder der neuen Potenz geben. Z. E.

$$\begin{array}{cccccc} a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a & 1 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 & b^5 \end{array}$$

$$a^5 \quad a^4b \quad a^3b^2 \quad a^2b^3 \quad ab^4 \quad b^5,$$

Wie man die vor den Po:

welches die fünfte Dignität von $a + b$ wäre, wenn die Zahlen, oder Coefficienten, oder

oder Unzen, wie sie auch genennt werden, nemlich 1, 5, 10, 10, 5, 1 vollends dabei stünden. Da nun diese Unzen oder Coefficienten bey einer jeden Dignität sich ändern; so fragt sich nun, ob man keine allgemeine Regel wie für die Dignitäten selbst, also auch für die Coefficienten geben könne. Wann man die obige Tabell anseheth, so findet man, daß die Coefficienten durch das Product der Exponenten der ersten Progression von a, dividirt durch das Product der Exponenten der zweyten Progression von b, oder überhaupt das Product der in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlzeichen, entstehen können. Z. E.

tenzen stehende Zahlen nenne? wir heißen sie nemlich am schiedlichsten Coefficienten.

Eine Regel für die Coefficienten, wie solche aus der Tabell durch die Introduction sich erweisen läßt.

Die Exponenten von a sind 5, 4, 3, 2, 1.
natürliche Zahlprogr. 1, 2, 3, 4, 5.

folglich der Coefficient vom

zweyten Glied

$$\frac{5}{1} = 5$$

vom dritten

$$\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = \frac{20}{2} = 10$$

vom vierten

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{60}{6} = 10$$

vom fünften

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{120}{24} = 5$$

vom sechsten

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{120}{120} = 1$$

Eben so findet man die Coefficienten der sechsten, siebenden und anderer Dignitäten; oder überhaupt, wenn der Exponent von dem ersten Glied m wäre, so giebt es folgende Progression:

Wie man die Progression der Potenzen selbst noch allgemeiner ausdrücken

280 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

$$a^m, a^{m-1}b, a^{m-2}b^2, a^{m-3}b^3, a^{m-4}b^4, a^{m-5}b^5 \text{ u. s. w.}$$

Dann es ist eben so viel, wenn ich in der obigen Progression setze,

$$\begin{cases} a^5, a^{5-1}b, a^{5-2}b^2, a^{5-3}b^3, a^{5-4}b^4, a^{5-5}b^5 \\ a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, b^5 \end{cases}$$

Man wird daher diesen allgemeinen Ausdruck für alle Potenzen verstehen; folglich auch die Coefficienten nach der beobachteten Regel finden, da nemlich die Progressionen

$$m, m-1, m-2, m-3, m-4$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

geben werden den Coefficienten für das zweite Glied $\frac{m}{1}$

für das dritte $\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}$

für das vierte $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

für das fünfte $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ u. s. w.

Denn wenn m in Zahlen gegeben wird, so muß sich die Progression endigen; z. E. wenn $m = 5$, ist $m - 5 = 0$, folglich das ganze Product null, und die Progression höret auf.

Warum dieser Beweis, unerachtet er eine bloße Induction

§. 10. Dieser Beweis ist nun eine Induction, und freylich nicht so scharf, als wenn er eine mathematische Demonstration wäre. Allein man mag den Versuch machen,

machen, bey was für einer Potenz man ist, doch
will, so wird man finden, daß die Regel ^{allgemein}
wahr und gewiß seye. Inzwischen hat ^{seye;}
man doch in neuern Zeiten auf Beweise ^{und ob man}
gesonnen, welche vollkommene mathematis- ^{ihn nicht auf}
che Demonstrationen heißen können. Ich ^{eine andere}
will einen hier anführen, den ich vor meh- ^{Art, was}
rern Jahren schon in der von mir heraus- ^{nemlich die}
gegebenen Lettre sur quelques parado- ^{Coefficienten}
xes du calcul analytique aufgesetzt, und ^{betrifft, des}
zu Berlin in der Schule des berühmten Hrn. ^{monstriren}
Prof. Eulers gelernet habe. Wir wollen ^{konne.}

die Coefficienten mit den größern Buch-
staben des Alphabets bezeichnen, und das
eine Glied der Wurzel a , das zweite x , den
Exponenten aber n nennen: so wird seyn

$$(a+x)^n = a^n + Aa^{n-1}x + Ba^{n-2}x^2 + Ca^{n-3}x^3 \text{ u. s. w.}$$

dieses hat keine Schwierigkeit. Wenn ^{Allgemeine}
wir nun die Summe der Progression S ^{mathematis-}
heißen; so wird $(a+x)^n = S$; diesen ^{che Demon-}
Ausdruck solle man differentiliren. Wir ^{stration für}
brauchen einen Lehrsatz dazu, nach welchem ^{man den}
man den Exponenten n um eins verringert, ^{die Regel des}
und hernach alles mit ndx multiplicirt; ^{Coefficienten}
folglich ist $n(a+x)^{n-1}dx = dS$ oder die ^{ten, welche}
Differentialgröße von S , welche durch dS ^{aber Anfang}
ausgedruckt wird. Die Differentialgröße ^{ger so lange}
von a ist $= 0$, weil es als eine beständige ^{noch über}
Größe angesehen wird, welche weder ab-
noch zunimmt. Alles dieses solle an seinem
Ort umständlich erwiesen werden. Es ist also

282 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

schlagen föus $n(a+x)^{n-1}dx = dS$; folglich §. 9. 58. 59. wenn
nen, bis sie die $(a+x)^n = S$ gleiches mitt gleichem dividirt wird, .

Flurionens
rechnung $\frac{n dx}{a+x} = \frac{dS}{S}$

gelesen und $\frac{n dx}{a+x} = \frac{dS}{S}$ §. 9.

verstanden $n dx = \frac{(a+x)dS}{S}$

haben.

$\frac{n dx}{a+x} = \frac{dS}{S}$ und

$$nSdx = (a+x)dS$$

$\frac{nSdx}{dx} = \frac{(a+x)dS}{dx}$

$$nS = (a+x) \frac{dS}{dx} \text{ folglich}$$

$$(a+x) \frac{dS}{dx} - nS = 0.$$

Den Werth dieser auf Nullreducirten Gleichung muß man nun in der obigen Progression ausdrücken:

$$\text{weil } S = a^n + Aa^{n-1}x + Ba^{n-2}x^2 \text{ u. f. w.}$$

$$\text{so ist } dS = 0 + Aa^{n-1}dx + 2Ba^{n-2}xdx + 3Ca^{n-3}x^2dx \text{ u. f. w.}$$

$$\text{und } \frac{dS}{dx} = 0 + Aa^{n-1} + 2Ba^{n-2}x + 3Ca^{n-3}x^2 \text{ u. f. w.}$$

folglich, wenn man beederseits mit $a+x$

$$\text{multiplicirt } (a+x) \frac{dS}{dx} =$$

$$0 + Aa^n + 2Ba^{n-1}x + 3Ca^{n-2}x^2 + 4Da^{n-3}x^3 \text{ f.}$$

$$+ Aa^{n-1}x + 2Ba^{n-2}x^2 + 3Ca^{n-3}x^3 \text{ f.}$$

so

so hat man, weil

$$— nS = — na — nAa^{n-1}x — nBa^{n-2}x^2 \text{ u. s. f.}$$

$$(a+x) \frac{dS}{dx} — nS = 0 + (Aa^n — na^n)$$

$$+ (2Ba^{n-1}x + Aa^{n-1}x — nAa^{n-1}x)$$

$$+ (3Ca^{n-2}x^2 + 2Ba^{n-2}x^2 — nBa^{n-2}x^2)$$

$$+ 4Da^{n-3}x^3 + 3Ca^{n-3}x^3 — nBa^{n-2}x^2)$$

Da nun dieses zusammen Nulle ist, und die Coefficienten beständige Größen sind, die von x nicht abhängen, so wird ein jedes Glied Nulle seyn; folglich

I. $Aa^n — na^n = 0$

II. $2Ba^{n-1}x + Aa^{n-1}x — nAa^{n-1}x = 0.$

III. $3Ca^{n-2}x^2 + 2Ba^{n-2}x^2 — nBa^{n-2}x^2 = 0$

Aus der ersten Gleichung finden wir also, weil $Aa^n — na^n = 0$,

$$Aa^n = na^n$$

$$: a^n$$

$$A = n$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich folgende:

$$2Ba^{n-1}x = nAa^{n-1}x — Aa^{n-1}x$$

$$: a^{n-1}x$$

$$2B = nA — A.$$

$$= (n — 1) A \quad \S. 60.$$

$$B = \frac{(n-1)}{2} A$$

Aus der dritten Gleichung kommt heraus

$$3Ca^{n-2}x^2 = nBa^{n-2}x^2 — 2Ba^{n-2}x^2$$

$$: a^{n-2}x^2$$

$$3C = nB — 2B = (n — 2) B$$

$$: 3$$

$$C = \frac{n-2}{3} B.$$

Da

Da nun $A = n$,

$$B = \frac{n-1}{2} A.$$

$$C = \frac{n-2}{3} B:$$

so werden die Coefficienten, wenn man die Werthe dafür setzt, heißen:

$$A = n$$

$$B = \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}$$

$$C = \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ u. s. w.}$$

§. III. Diesen Beweis kann man nun überschlagen, bis man das letzte Capitel im folgenden Theil gelesen und verstanden hat. Wir haben unsern Lesern dadurch zeigen wollen, daß man auch diese wichtige Newtonische Regel demonstrieren könne. Einige andere haben vorzeiten die sogenannte Wundertafel (Tabulam mirificam) zu Hülfe genommen und damit verglichen; sie entsteht, wenn man die in natürlicher Ordnung fortlauffende Zahlen so oft addirt, als die Progression es erfordert. Z. E.

Δ									
			I		I				
			I	2		I			
		I	3	3		I			
	I	4	6	4		I			
	I	5	10	10	5		I		
	I	6	15	20	15	6		I	
	I	7	21	35	35	21	7		I
I	8	28	56	70	56	28	8		I

Die

Was die so

genannte

Wundertafel

sey.

Der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 285

Die erste Reihe enthält Einsen, die zweite alle Zahlen in der gewöhnlichen Zahlenprogression, die dritte finde ich, wenn ich die unmittelbar vorhergehende Reihe addire, und sage, 1 und 2 sind 3, und 3 und 3 sind 6, und 4 sind 10, und 5 sind 15, und 6 sind 21; die vierte finde ich, wenn ich die dritte addire; 1 und 3 sind 4, und 6 sind 10, und 10 sind 20, und 15 sind 35, und 21 sind 56; die fünfte finde ich, wenn ich auf eben diese Weise die vierte addire; nemlich 1 und 4 sind 5, und 10 sind 15, und 20 sind 35, und 35 sind 70; u. s. w. Aus dieser Triangulartabelle sieht man nun, daß durch die vorgenommene Additionen verschiedene Polygonal- und Pyramidalzahlen herauskommen. Das aber ist das besondere dabei, daß die horizontale Zahlenreihen jedesmal die Coefficienten von derjenigen Dignität geben, deren größter Exponent das zweite Zahlzeichen in der Reihe ist. Inzwischen ist die allgemeine Methode, die Coefficienten zu finden, deswegen vorzuziehen, weil man sonst die Tabelle bis auf tausend und mehr Zahlen fortsetzen, folglich allzu weitläufig dabei werden müßte. Uebrigens kann man auch durch den Ausdruck für die Coefficienten, nemlich

$$\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ u. s. w.}$$

eine

eine neue Combinationsregel, davon wir schon S. 99. gehandelt haben, noch ausführlicher erklären. Wenn z. E. sechs Buchstaben so combinirt werden sollen, daß das erstemal je zween und zween, hernach drey, ferner vier u. s. w. zusammen kommen; so werden die Regeln nach eben diesem Gesetze sich richten, wie man leicht die Probe mit Buchstaben u. s. w. selbst machen kann.

Aus dem
bisherigen
wird die New-
tonische Re-
gel selbst
ermiesen,
ihr allgemei-
ner Ausdruck

§. 112. Nunmehr können wir erst recht den grossen Nutzen der Newtonischen Regel zeigen, nachdem wir den Beweis der Progression gegeben haben. Der allgemeine Ausdruck für alle nur denkbare

$$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 \\ + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 \text{ u. s. w.}$$

Nun wollen wir diesen Ausdruck noch schicklicher und kürzer schreiben lernen, damit man ihn desto besser auswendig lernen und behalten kann. Wir wissen aus

§. 57. daß $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$ und $a^{m-2} = \frac{a^m}{a^2}$ u. s. w.

folglich wird die obige Progression, wenn man gleiches für gleiches setzt, also aussehen

$$a^m + \frac{m}{1} \frac{a^m b}{a} + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \frac{a^m b^2}{a^2} \\ + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{a^m b^3}{a^3} \text{ u. s. w.}$$

Der

wird in einen
andern
gleichgülti-
gen verwand-
elt,

Der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 287

Der Ausdruck $\frac{b}{a}$ kommt in allen Gliedern und noch
 ausser dem ersten, vor. Wir wollen ihn ^{kürzer vor-}
 daher mit einem Buchstaben Q benen- ^{getragen.}
 nen. Und weil das erste Glied auch in
 allen folgenden Gliedern wieder vorkommt,
 so wollen wir seine Wurzel P, folglich
 das erste Glied P^m nennen. Dieses giebt
 nun die der obigen ganz gleiche Progression

$$P^m + \frac{m}{1} P^m Q + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} P^m Q^2$$

$$+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} P^m Q^3 \text{ u. s. w.}$$

Aus dieser Progression sehen wir, daß das
 erste Glied im zweiten, und das zweite
 im dritten, und das dritte im vierten u.
 s. w. ganz enthalten seyen. Dann z. E.
 das dritte Glied $\frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} P^m Q^2$ ist nichts

anders, als das zweite Glied multiplicirt Beweis,
 mit $\frac{m-1}{2} Q$, das ist $\left(\frac{m}{1} P^m Q\right) \cdot \left(\frac{m-1}{2} Q\right)$ warum man
 die Regel

Damit wir nun nicht so viel schreiben dür- ^{so kurz aus-}
 fen, so wollen wir das erste Glied A, das ^{drücken}
 zweite B, das dritte C, das vierte D u. ^{könne,}
 s. w. nennen, hernach jedesmal den vor-
 hergehenden kürzen Ausdruck in dem unmit-
 telbar folgenden Glied für seinen gleichen
 Factor substituiren, und das Q mit seinem
 Coefficienten damit multipliciren. Wenn
 also

288 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

also $P^m = A$, so ist $\frac{m}{1} P^m Q = \frac{m}{1} A Q$,

und weil wir diesen letzten Ausdruck B nennen, so ist das folgende Glied $\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} P^m Q^2$

$= \frac{m-1}{2} B Q$. und weil dieses C heißen

soß, so wird das nächste $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} P^m Q^3$

Der kürzeste
Ausdruck
der Regel
selbst, den
man deswegen
dem Gedächtniß
leicht einprägen kann,

$= \frac{m-2}{3} C Q$ u. s. w. Demnach heißt

die endliche und letzte der ersten aber vollkommen gleiche Progression: $P^m +$

$\frac{m}{1} A Q + \frac{m-1}{2} B Q + \frac{m-2}{3} C Q +$

$\frac{m-3}{4} D Q$ u. s. w. Das ist der Newton

nische Ausdruck, den man auswendig lernen und behalten muß, wenn man im folgenden den grossen Nutzen, den er über alle mathematische Wissenschaften ausbreitet, gründlich erlernen will. Diese einige algebraische Linie enthält mehr gründliches, zuverlässiges, wichtiges, fruchtbares und sinnreiches in sich, als oft ganze Bücher faum enthalten. Das wichtige und sinnreiche dabei werden diejenigen leicht begreifen, welche sich in einer scharfsinnigen Beobachtung der Ähnlichkeit üben, und daher im Stande sind, dem grossen Erfinder

allgemeine
Nutzbarkeit
der Newton-
nischen Re-
gel.

sind auch in diesem Theil der schönen Wissenschaften ein wahres Lob zu geben.

§. 113 Unsere Leser werden nun auch Anwendung einige Exempel von der Nutzbarkeit dieser der Regel Regel zu sehen wünschen. Denn wir ha- aufbesonder ben schon gesagt, daß man dadurch leicht re Fälle, alle mögliche Zahlen zu, allen möglichen besonders Potenzen erheben und auch aus allen Zah- besonders len alle Wurzeln durch die Approximation auf die Aus- ausziehen könne. Im letztern Falle ist m ziehung der ein Bruch: denn wie z. E. $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ §. 58. Wurzeln.

so ist auch $\sqrt[n]{P^m} = P^{\frac{m}{n}}$. Will man aber die Sache ganz ausgedruckt wissen, so wird die gegebene Progression heißen: $P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ$ u. s. w.

Ich stelle es nun meinen Lesern frey, welchen von beeden Ausdrücken sie lernen wollen: denn alle beede zugleich sind unnöthig; die Mathematik überhäuft einen nicht mit Regeln. Lernen sie den ersten, so merken sie nur, daß, bey Ausziehung der Wurzeln, m ein Bruch ist, dessen Nenner der Exponent derjenigen Wurzel ist, die man verlangt. Lernet man aber den letztern, so behält man nur dieses, daß $n = 1$, wenn man eine Zahl zu einer Dignität oder Potenz erheben solle; denn weil 1 nicht dividirt, so ist es in diesem Fall eben so viel, als wenn das n gar nicht da stünde. Ge-

Anwendung
auf wirkliche
Zahlzeichen,
bey Erhe-
bung zu Potens-
zen.

setzt nun, es wolle einer die Zahl 5 zur
zweiten Dignität erheben; so wird er, da-
mit ich ein recht leichtes Exempel gebe, 25
bekommen, weil $5 \cdot 5 = 25$. Nach der New-
tonischen Regel muß aber die Wurzel zwey
Glieder $a + b$ haben: wir müssen also
5 theilen, z. E. in $2 + 3 = 5$. Man ver-
langt demnach das Quadrat von $2 + 3$.

$$P \text{ ist also } = 2, = a, Q = \frac{3}{2} = \frac{b}{a} \text{ und } m = 2.$$

$$\text{Folglich } P^m = 2^2 = 4 = A$$

$$m A Q = 2 \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 12 = B.$$

$$\frac{m-1}{2} BQ = \frac{2-1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 12 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{36}{4} \\ = 9 = C.$$

$$\frac{m-2}{3} BQ = \frac{2-2}{3} \cdot 9 \cdot \frac{3}{2} = 0 \text{ weil } 2 - 2 = 0.$$

Folglich hört die Rechnung bey dem vierten
Glieder auf; und die Glieder sind $4 + 12$
 $+ 9 = 25$. Unerachtet nun dieses Exem-
pel leichter im Kopf gerechnet wird, so be-
greiffen doch unsere Leser von selbst, daß es
schwerere giebt; z. E. man verlangt die sechs-
te Potenz von 28, das ist von $20 + 8$. so
ist $P = 20$ und $Q = \frac{8}{20}$ und $m = 6$. da
dann die Rechnung sich bald geben wird.
Eben so findet man durch diese Regel

alle Wurzeln. Z. E. was ist $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$.
Weil $2 = 1 + 1$. so ist $P = 1$ und $Q = \frac{1}{1}$
 $= 1$ und $m = \frac{1}{2}$, oder nach dem zweyten

bey Auszie-
hung der Ir-
rational-
wurzeln, so
wohl in Zah-
len,

Aus-

Ausdruck $m = 1$ und $n = 2$. oder $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$
 demnach $p \frac{m}{n} = 1 \frac{1}{2} = 1 = A$

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} = B$$

$$\frac{m \cdot n}{2n} BQ = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = C$$

$$\frac{m \cdot 2n}{3n} CQ = \frac{1 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 2} \cdot \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{24} = D.$$

$$\frac{m \cdot 3n}{4n} DQ = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{128} = E.$$

Folglich ist die Quadratwurzel aus 2 oder
 $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128}$ u.s.w.
 Diese zwey Exempel sollen dißmalen ge-
 nugsam seyn, etwas von dem Nutzen uns-
 serer Regel bekannt zu machen. Denn
 unsere Leser erkennen von selbst, daß man,
 wie die gegenwärtige zwey, also noch viele
 tausend andere in Zahlen und Buchstaben
 auflösen könne wenn man nur jedesmal
 eine gegebene GröÙe in zwey Glieder nach
 Belieben theilt; welches bey allen GröÙ-
 fen, wie wir schon bewiesen haben, gesche-
 hen kann, wie dann auch alle zusammen-
 gesetzte GröÙen oder multinomische Wur-
 zeln auf zwey sich reduciren lassen. Will
 man auch ein Exempel in Buchstaben, so als auch in
 solle es $a^2 + x^2$ seyn. Man ziehe die Buchstaben.
 Quadratwurzel daraus: folglich wird

2 2 P =

292 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

$$P = a^2, Q = \frac{x^2}{a^2}, \frac{m}{n} = \frac{1}{2}, \text{ demnach}$$

$$P^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{2}{2}} = a = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} a \cdot \frac{x^2}{a^2} = \frac{x^2}{2a} = B.$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = \frac{1-2}{4} \cdot \frac{x^2}{2a} \cdot \frac{x^2}{a^2} = \frac{-1x^4}{4 \cdot 2a^3} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = \frac{1-4}{6} \cdot \frac{-1x^4}{8 \cdot a^3} \cdot \frac{x^2}{a^2} = \frac{3 \cdot 1 \cdot x^6}{6 \cdot 8 a^5}$$

$$\text{demnach ist } \sqrt[n]{a^2 + x^2} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3}$$

$$+ \frac{x^6}{16a^5} \text{ u. s. w. Wir werden uns im}$$

folgenden, besonders bei der Fluxionenrechnung, auf diese Newtonische Regel mehrmalen berufen; daher man sich in der Privatübung mit dergleichen Aufgaben noch ein Zeitlang beschäftigen kann. Die Namen der binomischen und multinomischen Wurzeln haben wir schon gehört. Jene bestehen aus zwey, diese aus mehreren Gliedern der Wurzel. Weil sich aber alle auf die binomische reduciren lassen, so siehet man, daß sich alle Aufgaben dieser Art durch die Newtonische Regel auflösen lassen. Und das ist nun alles, was wir von dieser wichtigen Lehre sagen wollten.

Warum diese Regel nicht nur auf binomische, sondern auch auf multinomische Wurzeln sich anwenden lasse, nebst einer kurzen Erklärung der gemeldeten Namen.

Wie man die Irrationalgrößen behandeln soll,

§. 114. Nach unserer gemachten Ordnung handeln wir jetzt von Irrationalgrößen, wie auch von den bloß eingebildeten Größen

Größen. Irrationalgrößen sind alle diejenige Wurzeln, die sich durch keine endliche Zahlen ausdrücken lassen. Z. E. $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{ax}$ u. s. w. Denn alle diese Ausdrücke sind so beschaffen, daß sie nach der Newtonischen in eine unendliche Reihe aufgelöst werden. Nun kann eine Irrationalgröße aus Rationalgrößen zum Theil

bestehen; wie z. E. $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2}$, da dann $\sqrt[3]{8}$ ein vollkommener Cubus ist. Folglich sieht man schon, daß man die Irrationalgrößen zum Theil von ihrer Irrationalität befreien könne, wenn sich die GröÙe hinter dem Wurzelzeichen in zween Factores vertheilen läßt, davon der eine diejenige Dignität ist, deren Wurzel man verlangt.

So ist $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$. Oder

überhaupt $\sqrt[m]{a^n x^m} = a^{\frac{n}{m}} x^{\frac{m}{m}} = a^{\frac{n}{m}} x =$

$x\sqrt[m]{a^n}$. In dieser Kunst muß man sich vorzüglich üben, weil sie zu schicklichen Ausdrücken Gelegenheit giebt, und solche Ausdrücke die Rechnung ungemein erleichtern. So ist $\sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{9 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{4 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$ u. s. w.

S. 115. Wie man die vier Species oder Rechnungsarten bey allen Größen anbringen kann, so kann man auch die Irrationalgrößen darnach behandeln. Sie lassen sich nemlich addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren. Bey der

294 Reithm. V. Cap. Von Ausziehung

Addition und Subtraction muß man sie, wie die Brüche, vorher unter gleiche Benennungen bringen; das ist, es müssen nicht nur Wurzeln von einerley Dignitäten seyn, sondern die hinter dem Wurzelzeichen stehende Grössen müssen einander gleich seyn. Z. E. $\sqrt[m]{x^n}$ und

$\sqrt[s]{y^r}$ werden folgender Gestalt unter einer

Benennung gebracht: $x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$

und $y^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{y^r}$ folglich $x^{\frac{n}{m}} + y^{\frac{r}{s}} = y^{\frac{rs}{ms}}$

$+ y^{\frac{r}{s}} = \sqrt[ms]{x^{ns}} + \sqrt[ms]{y^{rm}}$. Oder in Zah-

len; $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$. Diese zwei Grössen lassen sich

wirklich addiren, weil beederseits hinter dem Wurzelzeichen einerley Grösse, nem-

lich 2 steht. Ihre Summe ist also $5\sqrt{2}$. S hingegen $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ lassen sich anders

nicht addiren, als durch das dazwischen gesetzte Zeichen plus, weil die Grössen

hinter dem Wurzelzeichen ungleich sind, und sich nicht schicklicher ausdrucken las-

sen. Eben so geht es bey der Subtraction, z. E. $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2} = \sqrt{2}$; hnge-

gen $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ heißt eben $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ und läßt sich nicht anders ausdrucken, weil

die Grössen hinter dem Wurzelzeichen ver-

schieden sind. In der Multiplication wer-

den

Von der Ad-
dition und
Subtraction
der Irratio-
nalgrößen.

den die Gröſſen vor und hinter dem Wurzelzeichen mit einander multiplicirt, wenn es Wurzeln von einerley Dignitäten ſind; Von ihrer Multiplication und Division.
 E. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$; $2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{10}$
 u. ſ. w. Sind es aber Wurzeln von verſchiedenen Dignitäten, ſo ſucht man ſie vorher zu Wurzeln von einerley Dignitäten zu machen, wie wir gezeigt haben. Eben ſo geht es bey der Division; indem die Gröſſen hinter dem Wurzelzeichen durch einander dividirt werden, wenn es Wurzeln von gleichen Potenzen ſind.

3. E. $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$.
 Oder in zuſammengeſetzten Gröſſen,

$$\begin{array}{r} \sqrt{15} - \sqrt{6} \mid \sqrt{5} - \sqrt{2} \\ (\sqrt{3}) \quad \quad \quad | \\ \sqrt{15} \\ \hline - \sqrt{6} \\ \hline (\sqrt{3}) - \sqrt{6} \end{array}$$

0.

Will man die Probe machen, ſo wird $(\sqrt{15} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}) = \sqrt{15} - \sqrt{6}$, welches die zu dividirende Gröſſe war. Damit nun unſere Leſer überzeugt werden, daß dieſe Regeln richtig ſeyen, ſo wollen wir vollkommene Potenzen hinter die Wurzelzeichen ſetzen. Man ſolle addiren $\sqrt{4} + \sqrt{4}$ ſo hat man $2\sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4$. Da nun $\sqrt{4} = 2$ und folglich der Ausdruck $\sqrt{4} + \sqrt{4} = 2 + 2$. ſo ſieht man, daß die Additionsregel richtig, und

Wie man den Beweis der vorgeschriebenen Rechnung auch der Einbildungskraft

begrifflich
machen könn
en.

dahero auch $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ seye, wenn nemlich die Grösse hinter dem Wurzelzeichen keine solche Potenz ist, aus deren die Wurzel in endlichen Zahlen gegeben werden kann. Eben diese Methode läßt sich auch auf die Subtraction anwenden. Mit der Multiplication und Division wollen wir ein gleiches versuchen. Man solle $\sqrt{4}$ mit $\sqrt{9}$ multipliciren: wir wissen schon, was herauskommen muß, nemlich 6; weil $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$; und $2 \cdot 3 = 6$. Wenn wir nun die Grössen hinter den gleichen Wurzelzeichen miteinander multipliciren, so bekommen wir $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$. wie in der gewöhnlichen Rechnung. Und wenn man $\sqrt{16}$ durch $\sqrt{4}$ dividirt, so bekommt man 2; weil $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{4} = 2$ und $4 : 2 = 2$. Nach der Regel dividire ich die Zahlen hinter dem Wurzelzeichen, da ich dann $\sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$, wie in der gewöhnlichen Rechnung, bekomme. Also haben die Regeln ihre vollkommene Richtigkeit; und unsere Leser sehen zugleich in einem neuen Exempel, wie man der Einbildungskraft durch Hülfe der Reduction auf ähnliche und leichtere Fälle, auch das, was blos der Verstand begreift, gleichsam vor die Augen hinhahlen könne.

Was einge-
bildete Grös-
sen seyen,

§. 116. Eingebildete Grössen sind solche Grössen, welche weder positiv noch negativ, und noch vielweniger Nullen sind

sind. 3. E. $\sqrt{-2}$ — 2. wenn nemlich hinter (quantitates
dem Wurzelzeichen das Zeichen minus & radices
der Grösse vorgesetzt wird. Sie sind wes- imaginariae)
der positiv noch negativ, sonst würde -2
 $= +2$ seyn. Sie sind aber auch nicht
Nullen, sonst wäre $-2 = 0$. Folglich
sind es eingebildete Grössen, und das ist
der Grund dieser Benennung. Denn
man darf deswegen nicht denken, daß es
contradictorische Grössen seyen; indeme
die obige Erklärung blos auf den mathe-
matischen Operationen beruhet. Im phi-
losophischen Verstand sind es dennoch
positive Grössen: dann was man sich vor-
stellen, einbilden und denken kann, ist
positiv. 3. E. in der Geometrie sind ne-
gative Grössen diejenige, welche eine der
positiven entgegen gesetzte Richtung ha-
ben. Nun kann ich eine solche Grösse
als ein Quadrat ansehen, welches 3. E.
 -4 seyn solle; also läßt sich auch die Sei-
te des Quadrats denken, welche $\sqrt{-4}$
heissen wird. In der Arithmetik kann
zwar kein Quadrat $-a^2$ seyn; denn ent-
weder ist die Wurzel $-a$ oder $+a$: ist
sie $-a$, so ist das Quadrat $+a^2$, weil mi-
nus mit minus plus giebt; ist sie $+a$, so
ist das Quadrat vorhin $+a^2$. Allein
nach der obigen Erklärung läßt sich doch
wenigstens in der Geometrie eine solche
Wurzel denken.

Ob solche
Grössen we-
nigstens im
philosophis-
chen Ver-
stand nichts
positives
seyen, und
wie ferne
man sich selb-
st einbils-
den und vor-
stellen könne.

Wie man die
eingebildete
Größen für
ger ausdrücke,
wie man
sie addire und
subtrahire,

wie man sie
multiplicire
und dividire,

und warum
durch die
Multiplica-
tion das hin-
ter dem Wur-
zelzeichen ste-
hende Zei-
chen nicht
verändert
werde;

§. 117. Die vier sogenannte Species
lassen sich auch bey dieser Gattung von
Wurzeln anbringen. Man kann sie nicht
nur kürzer ausdrücken, sondern auch ab-
ziehen, subtrahiren, multipliciren und di-
vidiren. Dann z. E. $\sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot 2$
 $\sqrt{8} = \sqrt{4} \cdot 2$ u. s. w. das heißt man kürzer
ausdrücken §. 114. Die Addition und
Subtraction geschieht, wie bey den an-
dern Irrationalgrößen. Z. E. $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ und $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 1\sqrt{2}$. Das hat
keine Schwierigkeit. In der Multiplica-
tion befolgt man abermal die Regel d. 115.
nur mit dem Unterscheid, daß das hinter
dem Wurzelzeichen stehende Zeichen minus
durch die Multiplication nicht verändert
wird; indeme die Regel, einerley Zeichen
geben plus, verschiedene minus, nur auf
die vor dem Wurzelzeichen stehende Zeichen
sich anwenden läßt. Z. E. $\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$ und $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$ und $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$.
Denn wenn plus durch die Multi-
plication herauskäme, so würden die ein-
gebildete Wurzeln aufhören, solche zu seyn,
und in wahre verwandelt werden; welches
aber wider ihre Eigenschaft streitet, wie
wir §. 116. erwiesen haben. Das Pro-
duct von $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{2}$
multiplicirt mit $\sqrt{3}$

ist also $\sqrt{15} + \sqrt{21} + \sqrt{6}$.
Eben

Eben. diese Regel beobachtet man bey der Division; da z. E. $\sqrt[4]{6} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3}$ ist u. s. w. Dß ist die Lehre von den einaebildeten Wurzeln.

Daß es endlich auch Grössen gebe; die ein doppeltes Wurzelzeichen wie z. E. $\sqrt{\sqrt{6}}$ vor sich haben, wird man leicht begreifen. Man darf nur z. E. die vierte Potenz von 2 nemlich 16 nehmen; so wird $2 = \sqrt{\sqrt{16}}$ seyn; das ist, weil $\sqrt{16} = 4$ ist, $\sqrt{4}$ oder $\sqrt[4]{16} = 2$. Diese Grössen werden wie die Irrationalgrößen . 115. 116. behandelt; wir wollen unsere Leser daher nicht länger damit aufhalten.

§. 118. Es ist noch übrig, daß wir die letzte Eigenschaft der Wurzeln in Absicht auf ihre Dignitäten vollends erklären. Man kann nemlich fragen, ob eine gegebene Dignität nur eine oder mehr Wurzeln habe, und wenn sie mehr als eine hat, ob und wie man ihre Anzahl bestimmen könne. Unsere Leser werden schon vorläufig merken, daß die Antwort auf die Mehrheit der Wurzeln ausfallen wird. Denn wenn sie nur eine Quadratzahl betrachten, so sehen sie schon, daß sie aus der Multiplication zweyer Wurzeln erzeugt werden kann: das Quadrat 9 hat die Wurzel $+3$; sie kann aber auch die Wurzel -3 haben: dann $-3 \cdot -3 = +9$. So ist überhaupt $a^2 = a \cdot a$, ist aber

Ob es auch Grössen gebe, die ein doppeltes Wurzelzeichen haben, und wie diese zu behandeln seyen.

Ob eine gegebene Potenz nur eine oder mehr Wurzeln habe,

und wenn sie mehr als eine hat, ob man nicht bestimmen könne, wie viel und was für es seyen.

Vorbereitung zur Auflösung der vorgelegten Frage, wenn man verschiedene Gleichungen auf Nullreducirt.

aber auch $= -a$. $-a$. also sind die Wurzeln $+a$ und $-a$. Bei Cubiczahlen wird es vielleicht noch mehr Wurzeln geben, u. s. w. Wir wollen daher sehen, ob wir keine allgemeine Regel, die Wurzeln zu bestimmen, erfinden können. Wenn wir Gleichungen machen, so viel wir wollen, und sie alle auf Nullreducirt, miteinander multipliciren, so kann es geschehen, daß wir einen Weg finden, unsere Frage aufzulösen. Es seye demnach $x = 2$ so ist $x - 2 = 0$, ferner $x = 3$ so ist $x - 3 = 0$, und endlich $x = 4$ so ist $x - 4 = 0$, folglich

$$\begin{array}{r}
 x - 2 = 0 \\
 x - 3 = 0 \\
 \hline
 x^2 - 2x \\
 \quad - 3x + 6 \\
 \hline
 x^2 - 5x + 6 = 0. \\
 \quad x - 4 \\
 \hline
 x^3 - 5x^2 + 6x \\
 \quad - 4x^2 + 20x - 24. \\
 \hline
 x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0.
 \end{array}$$

Oder wenn wir Buchstaben nehmen, und setzen

$$\begin{array}{l}
 x = a \text{ folglich } x - a = 0 \\
 x = b \text{ folglich } x - b = 0 \\
 x = c \text{ folglich } x - c = 0
 \end{array}$$

so bekommt man durch die Multiplication

$$x - a$$

$$\begin{array}{r}
 x-a \\
 x-b \\
 \hline
 x^2-ax \\
 \quad -bx+ba \\
 \hline
 x^2-\left\{ \begin{array}{l} ax \\ bx \end{array} \right. +ba \\
 \qquad \qquad \qquad x-c \\
 \hline
 x^3-\left\{ \begin{array}{l} ax^2 \\ bx^2 \end{array} \right. +bax \\
 \qquad \qquad \qquad -cx^2+\left\{ \begin{array}{l} acx \\ bcx \end{array} \right. -bac \\
 \hline
 x^3-(a+b+c)x^2+(ba+ac+bc)x-bac=0
 \end{array}$$

Da nun für x gesetzt werden kann a, b, c , oder in Zahlen $2, 3, 4$, und die Gleichung allemal Null werden wird, wie sich leicht die Probe machen läßt; so sieht man, daß die letzte Gleichung drey wahre Wurzeln habe, nemlich a, b , und c , oder $2, 3$, und 4 . Wenn man aber das Exempel noch genauer betrachtet, so wird man folgende Regeln daraus herleiten können.

I. Eine jede Gleichung hat so viel Wurzeln, als der Exponent der ersten Dignität Einheiten in sich begreift; nemlich x^3 hat 3 Wurzeln, x^4 würde 4 haben, und x^n würde n Wurzeln haben.

II. Die bekannte Grösse des zweiten Gliedes ist die Summe aller Wurzeln, II. Aus was man die Wurzeln selbst findet
(2 +

den und nach
und nach bes
timmen kön
ne,

$(a + b + c)$ die bekannte Grösse des dritten Glieds ist die Summe der Producte aus je zwei und zwei Wurzeln; u. s. w. das letzte Glied ist endlich das Product aller Wurzeln. (abc) oder in Zahlen $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$.

III. Woran
man erkenne,
wie viel wah
re und falsche
Wurzeln eine
Grösse ha
ben.

III. Es sind so viel wahre oder positive Wurzeln vorhanden, als unmittelbare Abwechselungen der Zeichen $+$ und $-$ vorkommen, z. E. im gegenwärtigen Exempel wechseln die Zeichen gerade ab; folglich sind es lauter wahre oder positive Wurzeln. Diese letzte Regel hat Harriot gefunden und ohnelängst der berühmte Herr von Segner demonstriert. Die beede erstere fließen aus der Natur der vorgegebenen Gleichung, und haben keine weitere Demonstration nöthig.

Beantwortung der Frage, wie es zugehe, daß eine einige Grösse so vielerley Wurzeln haben könne,

§. 119. Vielleicht giebt es Leser, welchen es ungewöhnlich vorkommt, daß eine einzige Dignität, z. E. die zehende Dignität von zwei, so viele, nemlich in diesem Fall, zehen Wurzeln haben solle? In dem Wurzeltafeln gehen die Dignitäten in der Ordnung fort; und wir haben bisher geglaubt, 2 sey die einige Cubicwurzel von 8, 3 von 27, 4 von 64 u. s. w. Wie ist es dann möglich, daß diese Zahlen noch mehrere Wurzeln haben, und wenn dieses sich so verhält, wie viele Mühe braucht man, die mancherley Wurzeln der höhern Dignitäten zu finden? Auf die
erste

Der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 303

erste Frage wollen wir zuerst durch ein augenscheinliches und leichtes Exempel antworten, damit auch die Einbildungskraft von der Möglichkeit dieser Sache deutlich überzeugt werde. Wir sagen: die Cubiczahl 8 oder 2^3 hat wirklich drey Wurzeln, nemlich die positive Wurzel 2, und noch zwei andere eingebildete, welche $-1 + \sqrt{-3}$ und $-1 - \sqrt{-3}$ sind. Was die positive Wurzel anbelangt, so hat die Sache keine Schwierigkeit, dann $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Daß hingegen der Cubus der beiden eingebildeten Wurzeln $(-1 + \sqrt{-3})^3$ und $(-1 - \sqrt{-3})^3$ auch vollkommen achte ausmachen, das müssen wir jetzt beweisen. Die Sache ist leicht, wenn man nur gut multipliciren kann. Denn

und wie z. B. 8 oder die Cubiczahl von 2 wirklich drey verschiedene Wurzeln habe, durch deren dreyfache Multiplikation der Cubus 8 entsteht.

Die ganze Sache wird durch ein augenscheinliches Exempel auch der Einbildungskraft begreiflich und faßlich gemacht,

$$\begin{array}{r} -1 + \sqrt{-3} \\ -1 + \sqrt{-3} \\ \hline +1 - \sqrt{-3} \\ -\sqrt{-3} + 1 \cdot -3 \end{array}$$

gibt das Quadrat $+1 - 2\sqrt{-3} - 3 = -2 - 2\sqrt{-3}$ dieses Quadrat wird nochmalen multiplicirt durch die Wurzel =

$$\begin{array}{r} -3 + \sqrt{-3} \\ +2 + 2\sqrt{-3} \\ \hline -2\sqrt{-3} - 3 - 2 \cdot -3 \end{array}$$

so bekommt man

die Cubiczahl = $+2 - 2 \cdot -3$

Der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 309

dividirende Zahl so wohl als der Divisor
 $= 0$ waren. Nun wollen wir beiderseits
 3 subtrahiren, so ist, weil

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$3 = 3$$

$$x^2 + 2x + 1 = -3$$

und wenn man beiderseits die Quadrats-
 wurzel ausziehet,

$$x + 1 = \pm \sqrt{-3} \text{ folglich}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{-3}$$

welches die beide eingebildete Wurzeln
 sind. Der Grund, warum wir die Qua-
 dratwurzel von -3 gesetzt haben $+\sqrt{-3}$
 und $-\sqrt{-3}$ oder $\pm\sqrt{-3}$ wird unsern
 Lesern aus §. 117. noch erinnerlich seyn:
 weil nemlich eine jede Quadratwurzel
 das Zeichen $+$ und $-$ haben, und a^2
 nicht nur $+a$, $+a$ sondern auch $-a$, $-a$
 seyn kann.

§. 120. Nunmehr glauben wir, un-
 sere Leser wundern sich nicht mehr darü-
 ber, wenn sie hören, daß die Potenzen
 mehrere und verschiedene Wurzeln haben
 können. Wir eilen daher auch zur
 zweiten Antwort, und zeigen, wie man
 die verschiedene Wurzeln finden solle.
 Dieses ist nun freylich ein beschwerliches
 Geschäft; denn es ist nicht nur die Fra-
 ge, wie man die Wurzeln überhaupt,
 sondern wie man besonders die positive

folgen aus-
 dem bisher-
 gen, und
 Vorberei-
 tungen zur
 zweiten Ant-
 wort, wie
 man nemlich
 die verschie-
 denen Wurz-
 eln wirklich
 finden solle.

Unterschied
der wahren
und falschen
Wurzeln.

Eingebildete
Wurzeln
sind, wo sie
sich finden,
allemaal paar-
weis vorhan-
den.

Ein Exempel
von lauter
wahren und
positiven
Wurzeln.

Ein Exempel,
wo auch ne-
gative Wur-
zeln vorkom-
men.

und wahre Wurzeln herausbringen könn-
ne. Wahre und positive Wurzeln sind
nemlich alle, welche das Zeichen plus ha-
ben: falsche hingegen heißen diejenige,
welche negativ sind, oder das Zeichen mi-
nus vor sich haben; man kann auch die
eingebildete Wurzeln einigermaßen hieher
rechnen. Weit schicklicher wäre es, wenn
man die erstere nur positive, die letztere aber
negative, und nicht falsche Wurzeln hieß-
se. Von den eingebildeten Wurzeln
merkt man dieses insbesondere noch an,
daß, wo sie vorhanden, selbige nie allein,
sondern noch einen oder mehrere Gefährten
haben, doch so, daß ihre Anzahl niemals
ungleich, sondern immer gleich und
gerade ist. Es sind also entweder zwei,
oder vier, oder sechs, niemals aber
nur eine, oder drey, oder fünf u. s. w.
in einer Potenz befindlich. Wenn dem-
nach in einer Potenz drey eingebildete
Wurzeln gefunden worden sind, so wird
gewiß die vierte auch noch darinnen steh-
ken. In dem §. 118. gegebenen Fun-
damentalexempel kommen lauter wahre
und positive Wurzeln vor; wir wollen
dahero auch eines von negativen geben,
ehe wir die Art und Weise, die Wurzeln
wirklich zu suchen, vollends erklären. Es
seye $x = 2$ so ist $x - 2 = 0$. Ferner
seye $x = -3$ so ist $x + 3 = 0$. Folglich
 $(x - 2) \cdot (x + 3) = x^2 + x - 6 = 0$.
Weil

Weil zwei Zeichen plus auf einander folgen, so siehet man schon, daß nach §. 118. nr. III. eine negative Wurzel da seye; es ist aber auch eine positive vorhanden, weil plus und minus einmal unmittelbar auf einander folgen. Die Probe dieser Regel erhellet aus der vorgenommenen Operation selbst: dann die eine Wurzel war ja -3 und die andere $+2$. Ferner hat die erste Gröſſe den Exponenten zwey; folglich enthält die Gleichung zwei Wurzeln, wie abermal aus der Operation selbst ersichtlich ist. Die bekannte Gröſſe des zweiten Gliedes ist 1, dann $x = 1x$; folglich ist 1, die Summe aller Wurzeln, indeme $-3 + 2 = -1$. nur daß sie das entgegengesetzte Zeichen hat. Endlich das letzte Glied ist das Product der Wurzeln; dann $-3 \cdot 2 = -6$. Wann ich also für x in der Gleichung -3 setze, so habe ich $x^2 + x - 6 = -3 \cdot -3 + 1 \cdot -3 - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$. Auf gleiche Weise werden Gleichungen von höhern Potenzen gefunden; und der Unterschied bestehet blos darinnen, daß die Rechnung mühsamer und weitläufiger wird.

§. 121. Nunmehr können wir zeigen, wie man die wie man die wahre Wurzeln findet. Wir haben gehört, daß das letzte Glied das Product aller Wurzeln seye, daher man am sichersten gehet, wenn man das letzte Glied in alle seine Factores vertheilet, und

Allgemeine
Antwort.

Warum man
noch beson-
dere Ant-
worten und
Auflösungen
nöthig habe,
und was für
Fälle vor-
kommen,
welche man
besonders zu
merken habe.

und mit einem jeden einen Versuch macht, ob er für x gesetzt werden könne, und durch diese Substitution die neue Aequation Null werde. Ist dieses, so ist die angenommene Wurzel eine wahre Wurzel. Z. E. in dem obigen Exempel $x^2 + x - 6$ ist das letzte Glied $6 = 2 \cdot 3$; wir wollen also einen Factor, nemlich 2 für das x setzen, so werden wir haben $4 + 2 - 6 = 0$; folglich ist 2 eine wahre Wurzel. Weil es aber geschehen kann, daß nicht nur einige Glieder in einer solchen Gleichung fehlen, sondern daß auch selbst das letzte Glied gar zu groß ist, und allzu viele Factores hat, folglich die Arbeit durch das oftmalige Versuchen zu mühsam und langsam würde; so hat man auf Mittel gesonnen, eines theils eine Gleichung kleiner zu machen, andern theils die nähere Grenzen zu finden, zwischen welche die wahre Wurzeln hineinfallen. Denn wenn das letzte Glied klein ist, so hat es weniger Factores; je weniger Factores aber darinnen stecken, desto eher und gewisser kann ich die Wurzeln verrathen. §. 118. nr. II. Ferner wenn ich die Grenzen der Wurzel weiß, z. E. daß sie zwischen 5 und 12 hineinfalle, oder grösser als 5, und kleiner als 12 seye, so werde ich die wahre Wurzel auch leichter finden, als wenn mir diese Grenzen unbekannt wären. Wie man nun diese beide Mittel finden und anwen-

den

den solle, müssen wir jeso noch erklären.

§. 122. Wir zeigen zuerst, wie man eine Gleichung, folglich auch ihr letztes Glied, kleiner machen könne; wiewohl es nöthig ist, daß es, wenn Brüche vorkommen, auch zuweilen grösser werde; sodann wie man die fehlende Glieder ergänzen solle. Diß können wir am besten thun, wenn wir die Art und Weise, wie die vier Rechnungsarten oder Species auf die Gleichungen von dieser Art angewendet werden, vorläufig erklären. Man kann hier nemlich wiederum addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren, und das alles auf eine gar leichte und bequeme Weise. Z. E. man solle in der Gleichung $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Wie man eine gegebene Gleichung verändern könne, und wie dieselbe durch Anwendung der vier Rechnungsarten geschehe;

die Wurzel x um 3 vermehren, oder zu x noch drey addiren, so sage ich, die um 3 vermehrte Wurzel oder $x + 3$ solle y heißen, das ist:

$$\begin{array}{rcl} x + 3 & = & y \text{ folglich} \\ x & = & y - 3 \\ \hline x^2 & = & (y - 3) \cdot (y - 3) = y^2 - 6y + 9 \\ - 5x & = & - 5y + 15 \\ + 6 & = & + 4 \\ \hline \end{array}$$

eine neue Gleichung $y^2 - 11y + 28 = 0$ in welcher $y = x + 3$. Eben so kann ich subtrahiren, z. E. 2, wenn ich setze

$$\begin{array}{rcl} x - 2 & = & y. \text{ Da dann} \\ x & = & y + 2 \text{ und die ganze} \\ u & 3 & \text{Operation.} \end{array}$$

310 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

Operation, wie die obige vorgenommen wird. Nämlich ich muß das Quadrat von x in dem gleichen Werth von $y + z$ suchen, da ich dann $y^2 + 4y + 4$ bekomme; hernach muß ich $-5x$ in dem gefundenen Werth von x , ausdrücken, da ich dann $-5(y + z) = -5y - 10$ bekomme; das letzte Glied 4 muß ebenfalls noch addirt werden, wenn die Gleichung null werden solle. Das giebt nun den Ausdruck $y^2 - y - 2 = 0$; in welchem $y = x - 2$. u. s. w.

Wie man die
Multiplica-
tion bey sol-
chen Wurzeln
anbringe,

§. 123. Man kann die Wurzeln solcher Gleichungen auch multipliciren. Dann man solle in der Gleichung

$$x^3 + bx^2 + cx + q = 0$$

die Wurzel x mit a multipliciren; so setzet man $ax = y$ folglich

$$x = \frac{y}{a}; \text{ demnach ist:}$$

$$x^3 = \frac{y^3}{a^3}$$

$$bx^2 = \frac{by^2}{a^2}$$

$$cx = \frac{cy}{a}$$

$$q = q$$

Also
$$\frac{y^3}{a^3} + \frac{by^2}{a^2} + \frac{cy}{a} + q = 0.$$

$$\frac{y^3}{a^3} + \frac{by^2}{a^2} + \frac{cy}{a} + q = 0. \quad \text{wenn}$$

wenn ich nemlich beederseits mit a^3 multipl. cire. In dieser Gleichung ist $y=x$. a. Man darf also in diesem Fall eine gegebene Gleichung nur durch eine geometrische Progression multipliciren, deren erstes Glied eins, das zweyte aber, oder der Exponent diejenige Zahl ist, durch welche die Gleichung multiplicirt werden solle. Dann die obige Gleichung wird eben so gut erhalten, wenn man ein jedes Glied in die darunter geschriebene Progression multiplicirt; z. E.

und was für eine allgemeine und leichte Regel, solche Gleichungen zu multipliciren, aus der Operation hervorgeleitet werde.

$$\begin{array}{r} y^3 + by^2 + cy + q \\ 1 \quad a \quad a^2 \quad a^3 \\ \hline y^3 + aby^2 + a^2cy + a^3q = 0. \end{array}$$

Man muß aber in diesem Fall die fehlende Glieder nicht vergessen: denn es kann geschehen, daß das zweyte Glied u. s. w. wenn z. E. $+ 2x^2$ und $- 2x^2$, welche einander aufheben, in einer Gleichung vorkämen, ganz wegfielen; daher man seine Stelle mit einem * bezeichnet, und das correspondirende Glied der geometrischen Proportion darunter setzt. Z. E.

Wie man die in der Gleichung je und je fehlende Glieder dinst, falls zu behandeln suche, und warum oft Glieder fehlen.

$$\begin{array}{r} x^{3*} + cx - q \text{ multiplicirt mit 2 ist} \\ x^{3*} + cx - q \\ 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \\ \hline x^3 + 4cx - 8q. \end{array}$$

312 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

Von der Division der Gleichungen.

Ben der Division ist die Operation eben so leicht. Man solle in

$$x^3 + bx^2 - cx + r = 0$$

die Wurzel x dividiren durch a , so setzt man $\frac{x}{a} = y$ folglich

$$x = ay. \text{ Daher}$$

$$\begin{aligned} x^3 &= a^3 y^3 \\ + bx^2 &= ba^2 y^2 \\ - cx &= - cay \\ + r &= + r \end{aligned}$$

$$a^3 y^3 + ba^2 y^2 - cay + r = 0.$$

Wenn man nun beederseits mit a^3 dividirt, so hat man

$$y^3 + \frac{by^2}{a} - \frac{cy}{a^2} + \frac{r}{a^3} = 0$$

eine neue Gleichung, in welcher $y = \frac{x}{a}$;

nebst einer kurzen Divisionsregel.

Man siehet aber zugleich, daß sie erhalten werde, wenn man die erste Gleichung durch eine geometrische Progression dividirt, deren erstes Glied eins, und das zweyte die Zahl ist, durch welche dividirt werden solle; denn die Divisores $1, a, a^2, a^3$ gehen in geometrischer Progression fort. Man muß aber auch hier die Anmerkung beobachten, die wir in Absicht auf die fehlende Glieder bey der Multiplication gegeben haben.

So

Der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 313

So wird z. E. x durch 3 dividirt in der Gleichung

$$\begin{array}{r} x^3 + px - r \\ 1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \\ \hline x^3 + \frac{px}{9} - \frac{r}{27} \end{array}$$

Dies ist die ganze Lehre von der Anwendung der vier Rechnungsarten auf diese höhere Gleichungen. Nunmehr werden wir mit leichter Mühe zeigen können, wie man die verschiedene Wurzeln finden solle.

§. 124. Die Fälle, die einem die Operation schwer machen, haben wir angezeigt. Z. E. wenn ein Glied fehlt; so vermehrt man die Wurzel mit eins u. s. w. §. 122. wenn ein oder mehr Brüche vorkommen, so multiplicirt man mit dem Nenner des Bruchs, oder dem Producte aller Nenner der vorkommenden Brüche; kommen Irrationalgrößen vor, so sucht man sie bald durch die Multiplication bald durch die Division hinweg zu schaffen; will man ein Glied aus der Gleichung, z. E. das zweite hinweg bringen, so versucht man es theils durch die Addition, theils durch die Subtraction, je nachdem das wegzuschaffende Glied das Zeichen plus oder minus hat. In jenem Fall wird die Wurzel um die durch den Exponenten des ersten Glieds dividirte bekannte GröÙe des zweiten Glieds vermehrt, in diesem

Allgemeine Regeln, die Gleichungen zu ändern, wenn ein Glied fehlt, wenn die Gleichung Brüche hat, wenn Irrationalgrößen darinnen stecken, wenn man ein Glied wegzuschaffen will u. s. w.

u s
sem

314 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

sem aber vermindert. Will man das letzte Glied kleiner haben, so versucht man es bald durch die Addition bald durch die Subtraction; u. s. w. Was aber die Grenzen einer Gleichung betrifft, so müssen wir davon noch eine besondere Rechnung hersehen, welche in dieser Materie die letzte seyn sollte.

Wie man die Schranken finde, zwischen welche die wahre Wurzeln hinein fallen.

§. 125. Weil das letzte Glied das Product aller Wurzeln ist, so kann einem dieses die Schranken bestimmen helfen. Es seyen die Wurzeln 3 und 5, so wird $(x - 3) \cdot (x - 5) = x^2 - 8x + 15$. Hier kommt der in der Einleitung vorgefragene Satz das erstemal vor, nemlich: was grösser ist, als eine von zwei gleichen Grössen, das ist auch grösser als die andere u. s. w.

$$\text{Nun ist } x^2 - 8x + 15 = 0.$$

$$\text{Folglich } x^2 + 15 = 8x$$

$$\text{Dahero } x^2 < 8x$$

$$\text{---} : x$$

$$x < 8$$

$$\text{Ferner weil } x^2 + 15 = 8x$$

so ist

$$15 < 8x$$

$$\text{---} : 8$$

$$\frac{15}{8} < x.$$

Also sind 8 und $\frac{15}{8}$ die Schranken von x , das ist, die Wurzeln sind kleiner als 8 und grösser als $\frac{15}{8}$. Es ist auch wirklich so; dann

dann sie sind 5 und 3. Wenn man es nun allgemein machen will, so kann man

$$x^2 - qx + r = 0 \text{ setzen. Folglich}$$

$$x^2 + r = qx$$

$$\underline{\hspace{1cm}} r < qx$$

$$\frac{r}{q} < x$$

Ferner weil $qx = x^2 + r$

$$\text{so ist } \underline{\hspace{1cm}} qx < x^2$$

$$\hspace{1.5cm} : x$$

$$\text{und } q < x.$$

Also sind q und $\frac{r}{q}$ die Schranken bey qua-

dratischen Gleichungen. Bey Cubischen kann man sie eben so finden. Z. B. wenn das zweite Glied fehlt, so setzt man

$$x^3 - qx + r = 0. \text{ Folglich}$$

$$x^3 + r = qx$$

$$x^3 < qx$$

$$\underline{\hspace{1cm}} : x$$

$$x^2 < q$$

$$x < \sqrt{q}.$$

Ferner, weil

$$x^3 + r = qx \text{ so ist}$$

$$\underline{\hspace{1cm}} r < qx \text{ und}$$

$$\frac{r}{q} < x.$$

Folglich sind $\frac{r}{q}$ und \sqrt{q} in diesem Falle

die Schranken. u. s. w. Wenn man nun
die

316 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

Was man
weiter bey
Anwendung
der gegebenen
Regeln
zu beobach-
ten habe.

die Schranken einmal gefunden hat, so werden die wahre Wurzeln sich näher finden lassen. Da man die Sache dann nach denjenigen Regeln, die wir §. 124. vorgetragen, versuchet, und je nachdem einem die natürliche Gaben und die Uebung das Geschick dazu geben, durch wichtige und scharfsinnige Vergleichen, Substitutionen, Theilungen u.s.w. das Problem aufzulösen bemühet ist; wie wir jetzt bey den algebraischen Aufgaben zeigen wollen, wenn wir vorher noch was wenigens von den unreinen quadratischen Gleichungen gesagt haben werden.

Von unrei-
nen quadra-
tischen Glei-
chungen,

ihr allgemei-
ner Ausdruck,

wie nöthig
es seye, daß
man eine
solche Glei-
chung zu er-
gänzen wisse.

Wie viele
Fälle vor-
kommen;

§. 126. Wenn das letzte Glied in einer Quadratzahl fehlet, und doch die Zahl einer gegebenen Grösse gleich gesetzt wird, z. E. $x^2 + mx = n^2$, so heisset man diesen Ausdruck eine unreine quadratische Gleichung. Es ist ungemein viel daran gelegen, daß man diese Gleichung zu ergänzen wisse: denn sie kommt nicht nur öfters vor, sondern sie trägt auch zu den Auflösungen der schönsten und wichtigsten Aufgaben sehr vieles bey. Wir wollen die Auflösung auf zweyen Fälle anwenden. Der erste ist, wenn $x^2 + ax = b^2$; nun fragt sich, wie man die Gleichung ergänze, damit man die Wurzel ausziehen, und das x in bekannten Grössen hernach finden könne. Wir wissen, daß allemal gleiches herauskommt, wenn man gleiches

ches zu gleichem addirt. §. 9. Es ist also Auflösung nur die Frage, was man beederseits addiren solle? Wenn wir wüßten, wie das dritte Glied in der quadratischen Gleichung heißen müsse, so wäre es am natürlichsten, wenn wir dieses addiren. Wir wollen sehen, ob wir nicht einen Ausdruck finden können, der dem gesuchten dritten Glied gleich ist. Ein ganzes Quadrat ist $a^2 + 2ab + b^2$, das dritte Glied ist also das Quadrat von demjenigen halben Factor des zweiten Gliedes, der noch nicht im ersten Glied vorkame. Da nun die Factores des zweiten Gliedes $2ab$ sind a und $2b$; dann $a \cdot 2b = 2ab$; und aber a schon im ersten Glied vorgekommen: so richte ich mein Augenmerk blos auf den zweiten Factor $2b$; diesen halbiere ich, so habe ich b , sein Quadrat ist b^2 . Eben so mache ich es mit der obigen Gleichung:

$$\text{sie heißt } x^2 + mx = n^2$$

Das zweite Glied heißt mx , der Factor, auf den ich mein Augenmerk richte, heißt m , weil x im ersten Glied vorkam; ich halbiere also m , und bekomme $\frac{1}{2}m$, diesen halben Factor quadriere ich, da er dann $\frac{1}{4}m^2$ heißt, und folglich das dritte Glied des unvollkommenen Quadrats seyn wird. Wenn ich nun beederseits dieses Quadrat $\frac{1}{4}m^2$ addire, so finde ich

$$x^2$$

318 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

$$x^2 + mx = n^2$$

$$\frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2$$

$$x^2 + mx + \frac{1}{4}m^2 = n^2 + \frac{1}{4}m^2$$

Ziehe ich nun beiderseits die Quadrats
Wurzeln aus, so ist

$$x + \frac{1}{2}m = \sqrt{n^2 + \frac{1}{4}m^2}$$

$$\text{und } x = \sqrt{n^2 + \frac{1}{4}m^2} - \frac{1}{2}m$$

Auflösung

und Beweis

des andern

Falls.

Der andere Fall ist,

$$x^2 - mx = n^2, \text{ da ich dann wieder}$$

$$\text{addire } + \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2$$

$$x^2 - mx + \frac{1}{4}m^2 = n^2 + \frac{1}{4}m^2$$

$$x - \frac{1}{4}m = \sqrt{n^2 + \frac{1}{4}m^2}$$

$$x = \frac{1}{2}m + \sqrt{n^2 + \frac{1}{4}m^2}$$

Dieser letztere Fall ist wie der erste be-
schaffen; ausgenommen, daß das zweite
Glied der Wurzel negativ wird; dann
z. E. $(a-b) \cdot (a-b) = a^2 - 2ab + b^2$,
wie die allgemeine Multiplicationsregeln
mich lehren. Folglich darf ich in diesem
Fall $\frac{1}{4}m^2$ wiederum als eine positive Grö-
ße addiren; in der Wurzel aber wird al-
lemal das zweite Glied negativ seyn.
Das ist die Auflösung und der Beweis
von dieser überaus wichtigen Lehre, die
unreine quadratische Gleichungen, wie
sie Herr Baron von Wolf nannte, oder
(*æquationes quadraticas affectas*.) zu
behandeln. Wir können daher nicht um-
hin, unsern Lesern diese Regel noch eins-
mal anzupreisen, nach welcher man ein-
sol-

solches Quadrat ergänzt, wenn man das Quadrat des halbirten und im ersten Glied nicht vorgekommenen Factors vom zweyten Glied, zu ihm addiret. Wenn also der Ausdruck $x^2 + \frac{1}{2}x$ hiesse, so wird die Ergänzung $\frac{1}{16}$ heißen; wäre $x^2 + \frac{2}{3}x$ zu ergänzen, so muß das dritte Glied $\frac{a^2}{6 \cdot 6} = \frac{a^2}{36}$ heißen. Alle diese Fälle sind unter der Regel begriffen, weil man allemal den Coefficienten von x halbir, und hernach quadriert. Die Hälfte von $\frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{4}$, und das Quadrat davon $\frac{1}{16}$; die Hälfte von $\frac{2}{3}$ ist $\frac{1}{3}$, und das Quadrat davon $\frac{1}{9}$ u. s. w. Doch diese Ausdrücke werden unsere Leser nunmehr verstehen; wir wollen daher zum Beschlusse eilen.

Wiederholung der Regel, und Anwendung auf einige besondere Fälle in Zahlen und Buchstaben.

§. 127. Wir haben versprochen, am Ende der Arithmetik noch einige algebraische Aufgaben vorzulegen. Es giebt bestimmte und unbestimmte Aufgaben. Die letztere kommen mir vor, wie diejenige Fragen, darauf man einem vielerley Antworten geben kann; da hingegen die bestimmte Aufgaben solchen Fragen gleich sind, auf welche nicht mehr als eine einzige Antwort möglich ist. Z. E. wenn man fragt, ob man einem nicht zwei Zahlen sagen könne, deren Summe 30 seye; so kann man eine Menge Antworten darauf

Von algebraischen Aufgaben.

Unterscheid der bestimmten und unbestimmten Aufgaben.

auf geben. Denn $10 + 20$, $15 + 15$, $16 + 14$, $29 + 1$ u. s. w. sind lauter solche Zahlen, durch welche die Frage aufgelöst wird. Frage ich aber, wie die zwei Zahlen heißen, deren Summe drei und deren Differenz eins ist: so giebt es nur eine Antwort; nemlich die Zahlen sind 2 und 1. Weil aber doch solche bestimmte Fragen auch in der Buchstabenrechnung auf eine allgemeine Art aufgelöst werden: so kann man die erste Auflösung für individuell ansehen, die zweite hingegen für eine solche, die eine ganze Gattung von Individuellfragen, welche alle zu einer Classe gehören, auflöst. Nur hat man bey allen diesen Aufgaben vorzüglich auf die Möglichkeit zu sehen. Denn wie das geometrische Problem, man solle aus zwei geraden Linien ein Zweueck machen, in der Geometrie unmöglich ist; so giebt es auch in der Arithmetik dergleichen unmögliche Aufgaben und Fragen, welche entweder die Schwäche dessen, der sie aufgibt, oder dessen, der sie auflösen will, verrathen. So ist es unmöglich, zwei ganze und positive Zahlen zu finden, deren Summe 1, und deren Differenz 2. u. s. w. Man muß also zu den arithmetischen oder algebraischen Aufgaben, (denn es ist gleichviel, ob ich ihnen einen griechischen oder arabischen Namen gebe,) einen scharfsinnigen Witz und eine gute

Bestimmte Aufgaben sind wieder, unentweder individuell oder allgemein.

Warum man besonders darauf zu sehen habe, ob die Aufgabe auch möglich seye,

gute Beurtheilungskraft vorläufig mitbringen, wenn man einen guten Fortgang sich versprechen will. Hieraus wird sich hernach die Fähigkeit von selbst geben, eine Aufgabe, und besonders den Anfang der Rechnung, deutlich, kurz, und auf eine solche Weise zu setzen, daß man den Witz des Rechners sogleich aus den zwei bis drey ersten Linien erkennen kann.

und wie sich die Scharfsinnigkeit des Wises bey mathematischen Aufgaben besonders äußere.

S. 128. Um nun eine kurze Anleitung zu dieser schönen Arbeit zu geben, wollen wir unsern Lesern die Art und Weise, ein Problem geschickt und wohl zu setzen, aus den Newtonischen Schriften anführen. Die Aufgaben lassen sich durchgehends mit Worten und mit Zeichen ausdrücken. Wir wollen beide Ausdrücke in Zeichen und Worten nebeneinander setzen: denn die Hauptkunst eines algebratischen Geistes bestehet darinnen, daß er alle Bedingungen einer Aufgabe in wirklichen Gleichungen schicklich ausdrücke. J. E. Newton giebt folgendes Exempel:

Wie man ein Problem schicklich in Worten und Zeichen ausdrücke, und wie alles hierbey auf die Kunst ankomme, die Frage genau zu bestimmen und die erste Linien richtig zu setzen.

Ein Kaufmann vermehret sein Vermögen jährlich um den dritten Theil, nimmt aber alle Jahre zur Erhaltung seiner Familie 100 lb. Sterling davon weg, und wird nach drey Jahren nochmalen so reich, als er anfänglich war: wie viel hat er also im Vermögen?

Exempel, wie ein Problem gesetzt werden kann, wenn in

dividuelle

Umstände das
bey vorkom-
men.

I. Der Ausdruck
in Worten.

II. in Zeichen;

1) Ein Kauf-
mann besitzt ein
gewisses Ver-
mögen,

x

2) wovon er das
erste Jahr 100
Pf. Sterling
braucht.

$$x - 100$$

3) den Rest ver-
mehrt er um ein
Drittheil.

$$x - 100 + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$$

4) das zweite
Jahr braucht er
wieder 100 Pf.
davon.

$$\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$$

5) den Rest ver-
mehrt er um ein
Drittheil.

$$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} = \frac{16x - 2800}{9}$$

6) im dritten
Jahr braucht er
abermal 100 Pf.

$$\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$$

7) Er vermehrt
den Rest noch-
malen um ein
Drittheil,

$$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14800}{27}$$

8) und ist noch
einmal so reich
als er im An-
fang war.

$$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$$

Jetzt ist das Problem gesetzt, und es ist
weiter nichts übrig, als daß man calcu-
lirt, und x findet. Wenn man in der Glei-
chung beiderseits mit 27 multiplicirt, so ist

$64x$

$$\begin{array}{r} 64x - 14800 = 54x, \\ \text{folglich } 10x - 14800 = 0 \\ \hline 10x = 14800 \\ \hline : 10 \\ \hline x = 1480. \end{array}$$

In diesem Exempel siehet man wohl, daß der Begriff des Kaufmanns u. s. w. nicht zur Rechnung gehört; man könnte es also noch allgemeiner machen, wenn man den jährlichen Aufwand a , und die jährliche Vermehrung $\frac{1}{P}$ oder P nennen würde u. s. w. Dieses und einige folgende Exempel stehen in Newtons Arithmetica universalis.

§. 129. Nunmehr wollen wir nach der Ordnung, von allerley Gattungen, Exempel und Aufgaben herschren. Das leichteste ist: wenn man zwei Zahlen x und y finden solle, deren Summe a und deren Differenz b ist. Wir haben es in der Einleitung vorgetragen, jezo aber wollen wir es kürzer auflösen. Nach der Bedingung des Problems ist $x + y = a$, und $x - y = b$; nun will ich diese beide Größen zuerst addiren, und hernach voneinander subtrahiren, und sehen, was heraus kommt:

Von allerhand bestimmten Aufgaben, ohne individuelle Umstände; Wie man zwei Größen finden solle, deren Summe und Differenz gegeben ist.

$$\begin{array}{r}
 x + y = a \\
 x - y = b. \\
 \hline
 2x = a + b. \text{ Folglich} \\
 \hline
 : 2 \\
 x = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b.
 \end{array}$$

Die grössere Zahl x ist daher allemal der zur halben Summe addirten halben Differenz gleich; oder die grössere Zahl wird gefunden, wenn ich zur gegebenen Summe die gegebene Differenz addire, und alles zusammen hernach halbire, oder durch 2 dividire. Ferner, wenn man subtrahirt

$$\begin{array}{r}
 x + y = a \\
 x - y = b. \\
 \hline
 2y = a - b \\
 \hline
 : 2 \\
 y = \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b.
 \end{array}$$

Warum man diese Aufgabe behalten solle, und wo man sie wieder brauche,

Die kleinere Zahl ist also die halbe Summe weniger die halbe Differenz. Dieses ist die allgemeine Auflösung für alle Zahlen dieser Art. Man muß sie um so eher behalten, weil man sie in der Trigonometrie wieder gebraucht.

Wie man aus dem gegebenen Product

§. 130. Will man aus dem gegebenen Product und der Summe der Zahlen, die Zahlen selbst finden; so kann man die Aufgabe entweder auf das obige Problem reduc

Der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 325

reduciren, oder durch eine zu ergänzende quadratische Gleichung auflösen: denn wenn die Summe a und das Product b ist, so darf ich die halbe Differenz nur x nennen; da ich dann bekomme die grössere Zahl $\frac{1}{2}a + x$, und die kleinere $\frac{1}{2}a - x$, und ihr Product $\frac{1}{4}a^2 - x^2 = b$. Folglich $\frac{1}{4}a^2 - b = x^2$ und $x = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$. Nenne ich aber die gesuchte Zahlen x und y , so ist $x + y = a$, und $xy = b$. Da giebt es dann eine quadratische Gleichung;

und der Summe zweyer Gröfsen die Gröfsen selbst finden könne.

weil $x = a - y$ und $x = \frac{b}{y}$ folglich

$$a - y = \frac{b}{y} \text{ und } ay - y^2 = b \text{ oder}$$

$$y^2 - ay = -b. \text{ Dahero}$$

$$\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$y - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$$

$$y = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}. \text{ Da nun}$$

$x = a - y$, so läßt sich auch x leicht finden, wenn man den gefundenen Werth des y von a subtrahirt. Anfänger haben ein größeres Vergnügen, wenn man die Exempel mit individuellen Umständen verschönert; man kann daher einen zugleich auf die Probe setzen, ob er das wesentliche vom ausserwesentlichen nicht nur unterscheide, sondern auch das Problem selbst recht fasse. Wir wollen dahero einige hieher schreiben, welche theils Marquis d'Hospital, theils Newton gegeben haben.

Wie man die Exempel mit individuellen Umständen vortrage, und warum es für Anfänger nützlicher und besser seye.

326 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

Eine indivi-
duelle Aufga-
be, bey wel-
cher eine un-
reine quadra-
tische Gleichung vorkommt.

Der erstere sagt: ein Frauenzimmer wurde gefragt, wie alt sie seye. Sie antwortete: ihre Mutter habe sie gerade im vierzigsten Jahr ihres Alters gebohren, wenn man nun ihrer Mutter gegenwärtiges Alter mit ihrem (der Tochter) eigenen Alter multiplicire; so komme das Alter Methusalems heraus, des ältesten unter den Menschen, welcher 969 Jahre gelebet habe. Aus dieser Berechnung werde man ihr Alter finden. Wir nennen das Alter der Tochter x Jahre. Die Mutter muß also damals, da die Tochter um ihr Alter gefragt wurde, $40 + x$ Jahre alt gewesen seyn. Denn 40 Jahre war sie alt, da sie die Tochter gebahr; zu diesem Alter kommt nun noch das Alter der Tochter, da dann die Summe das Alter der Mutter in der gegebenen Zeit ausmacht. Dieses Alter solle mit dem Alter der Tochter multiplicirt werden, das Product ist 969. Nun ist die erste Gleichung gesetzt.

$(40 + x) x = 969$. Das ist, wenn man wirklich multiplicirt:

$40x + x^2 = 969$. Eine unreine quadratische Gleichung:

$$\begin{array}{r} x^2 + 40x = 969 \\ 400 = 400. \end{array}$$

$$x^2 + 40x + 400 = 969 + 400 = 1369.$$

$$x + 20 = \sqrt{1369} = 37.$$

$$x = 37 - 20 = 17.$$

Die Tochter 17 Jahre alt.

Also war
S. 131.

§. 131. Es giebt auch Exempel von Brüchen. Wir wollen sie wieder mit individuellen Umständen begleiten. Pythagoras wurde einmal gefragt: wie viel er Schüler habe? Er antwortete: die Hälfte studire die Philosophie, der dritte Theil die Mathematik, der vierte aber müsse sich noch im Stillschweigen üben; und eben jetzt habe er drey neue Schüler angenommen. Wenn man nun die Anzahl der Schüler x nennet, so wird nach des Pythagoras Antwort seyn:

Eine individuelle Aufgabe, wobei Brüche vorkommen;

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 3$$

das ist, wenn man die Brüche unter einerley Benennung bringt, und addirt,

$$\frac{12}{24}x + \frac{8x}{24} + \frac{6x}{24} = x + 3.$$

Folglich $\frac{26x}{24} = x + 3$

$$\begin{array}{r} \frac{26x}{24} = x + 3 \\ \underline{ - 24x} \quad \cdot 24 \\ 26x = 24x + 72 \\ 24x = 24x \\ \underline{ - 24x} \quad \text{subtr. } 24x. \\ 2x = 72 \\ \underline{ : 2} \\ x = \frac{72}{2} = 36. \end{array}$$

Also hat Pythagoras 36 Schüler gehabt.

§. 131. Wir wollen auch einige Exempel aus den Newtonischen Schriften geben. Ein Reisender wird von einigen Bettlern um ein Almosen ersucht; giebt er nun einem jeden 3 fr. so hat er

Eine individuelle Aufgabe aus Newtons Schriften.

$$x \cdot 4$$

$$8 \text{ fr.}$$

§ 28 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

8 fr. zu wenig; (dann wir wollen die englischen Münzsorten auf unser deutsches Geld reduciren,) giebt er aber einem jeden 2 fr. so bleiben ihm noch 3 fr. übrig. Man fragt: wie viel er Geld gehabt, und wie viel es Bettler gewesen seyen? Die Anzahl der Bettler solle x seyn; so ist $3x$ die Anzahl der Bettler dreymal genommen. Eben so viel Kreuzer nemlich $3x$ fr. mußte der Reisende nun ausgeben, wenn er einem jeden 3 fr. gab; denn er gäbe ja gleichviel aus, wenn dreymal so viel Bettler da wären, und er einem jeglichen einen Kreuzer gäbe: durch diese seine Vergleichung wird nun die Auflösung sehr leicht gemacht. Weil ihm also nach der Bedingung des Problems 8 fr. fehlen, wenn er $3x$ fr. ausgiebt; so ist sein ganz Vermögen, das er bey sich hat, $= 3x - 8$. giebt er aber einem jeglichen Bettler 2 fr. so giebt er in allem $2x$ fr. aus, und behält noch 3. Nun ist $3x - 8 - 2x = x - 8$; dieser Rest aber heißt in der Aufgabe 3 fr. folglich ist $x - 8 = 3$. und $x = 3 + 8 = 11$. Also waren es 11 Bettler, und sein Geld bestand in 25 fr.

Ein Exempel, welches mit dem §. 128. gegeben, eine Aehnlichkeit hat, ist folgendes. Eine Athenienserin gieng in den Tempel Jupiters, und bath, er möchte ihr Geld, das sie bey sich hätte, verdoppeln. Jupiter thats, und die Frau opferte
zur

Der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 329

zur Erkännlichkeit 3 fl. ; (denn wir wol-
len die griechische Münzsorten mit deut-
schen Namen ausdrücken.) Mit dem
Rest gieng sie in den Tempel des Apollo ,
bath ein gleiches , und opferte zur Dank-
sagung für die Verdopplung ihres Geld-
des abermal 3 fl. Endlich kam sie in den
Tempel der Minerva , und trug ihre ers-
te Bitte auch hier vor ; sie wurde noch
einmal befriediget , da sie dann ein glei-
ches Opfer mit 3 fl. in Minervens Tem-
pel zurück ließ. Als sie nach Haus kam ,
und ihr Geld zehlen wollte , so fand sie
mit Verwunderung , daß sie , der Verdopp-
lung ungeachtet , nicht mehr als einen
Gulden heimgebracht habe. Nun frage
man : wie viel sie anfänglich Geld gehabt
habe ? Wir wollen ihr bey sich gehabtes
Vermögen x nennen , das wurde erstlich
vom Jupiter verdoppelt ; folglich war es
 $2x$, und weil sie davon 3 fl. opferte , so
gieng sie mit $2x - 3$ fl. in den Tempel des
Apollo. Sie wurde dieser Rest wieder ver-
doppelt ; sie bekam daher $2(2x - 3)$
oder $4x - 6$, und opferte davon wieder
3 fl. ; folglich gieng sie mit $4x - 6 - 3$
 $= 4x - 9$ fl. hinweg. u. s. w.

Also erstlich hatte sie

Jupiter duplirt es,

Sie opfert 3 fl. und behält also

Apollo duplirt den Rest,

dahero hat sie wieder

x 5

	x
	$2x$
	$2x - 3$
	$4x - 6$
	Sie

330 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

Sie opfert 3 fl. bleiben ihr also,	$4x - 9$
Minerva duplirt den Rest;	
also hat sie	$8x - 18$
Sie opfert wieder 3 fl. folglich	
bringt sie heim	$8x - 21$

Dieses heimgebrachte ist nun ein Gulden,
nachdem sie es zahlte; folglich ist

$$8x - 21 = 1.$$

$$21 = 21 \text{ add.}$$

$$8x = 22.$$

$$\text{---} : 8$$

$$x = \frac{22}{8} = 2\frac{6}{8} \text{ fl.}$$

Also hatte sie vorher, ehe sie ihre geizige Bitte gethan, mehr Geld gehabt, als hernach. Man siehet leicht, daß dieses Exempel allgemein gemacht werden könnte: denn wenn sie a fl. übrig hatte, so ist $x = \frac{a+21}{8}$. Eben so können die Zahlen 21 und 8 gleichfalls allgemeiner gemacht werden. Z. E. wenn sie 3 fl. nach Haus gebracht hätte, so würde x gerade auch 3 fl. gewesen seyn; folglich würde sie weder mehr noch weniger gewonnen haben.

Einige Aufgaben, die
Proniczahlen
betreffend;

S. 132. Wir haben versprochen, der Proniczahlen noch zu gedenken; in so fern sie zu Aufgaben dienlich sind. Was eine Proniczahl seye, wissen wir: nemlich die Summe des Quadrats und seiner Wur-

Der Wurzeln u. algebr. Aufgaben. 331

Wurzel ist allemal eine Proniczahl. Nun will man wissen, wie man die Pronicwurzel finde. Es seye

$$x^2 + x = a \quad \text{quadratische Gleichung.}$$

Folglich

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \\ x^2 + x + \frac{1}{4} &= a + \frac{1}{4} \\ x + \frac{1}{2} &= \sqrt{a + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{(4a+1)}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4a+1} \\ x &= \frac{1}{2} \sqrt{4a+1} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Das ist der allgemeine Ausdruck für alle Pronicwurzeln. Weil nun ferner eine Proniczahl $a^2 + a$, und dieser allgemeine Ausdruck nach §. 60 = $(a+1)a$ oder $a(a+1)$; so siehet man, daß das Product zweyer unmittelbar aufeinander folgenden Zahlen allemal eine Proniczahl ist. Wie man mit leichter Mühe eine Proniczahl findet.
 §. E. $3 \cdot 4 = 12$ eine Proniczahl. Denn $3 \cdot 4 = 3(3+1)$ welcher Ausdruck eine Proniczahl andeutet. Es lassen sich also durch diese Anmerkung Proniczahlen genug mit leichter Mühe erfinden; dann §. E. $4 \cdot 5 = 20$, $5 \cdot 6$, $6 \cdot 7$, $7 \cdot 8$, $10 \cdot 11$, $99 \cdot 100$ u. s. w. sind lauter Proniczahlen.

§. 133. Wie man algebraische Aufgaben durch geometrische Progressionen auflöse, habe ich theils §. 128. 131. theils im vierten Capitel zwar nicht ausführlich gezeigt; weil aber doch eine umständliche Anleitung für alle Progressionen daselbst gegeben wurde, so werden unsere Leser von Von denenjenigen Aufgaben, welche durch Progressionen aufgelöst werden;
 selbst

332 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

selbst die dahin einschlagende Exempel auflösen können. Was aber die von Zeit und Raum, folglich auch von der Geschwindigkeit abhängende Aufgaben betrifft, so dünkt mich, sie gehören in die Mechanik; wenigstens muß man die Grundbegriffe der mechanischen Wissenschaften inne haben, wenn man die Geschwindigkeiten berechnen, und z. E. aus dem gegebenen Weg, der Zeit, wenn einer ausgeht, und wenn ein anderer ihm nachgeschickt wird, auch der Geschwindigkeit beeder Läufer den Punkt und die Zeit bestimmen solle, wo der eine den andern einholt, u. s. w. Wir wollen daher auch diese Aufgaben übergehen. Eben so könnte man die Frage, wo und wie oft der Minutenzeiger den Stundenzeiger in einer Uhr decke, auf gleiche Weise auflösen. Er wird ihn nemlich eilffmal bedecken, das erstemal innerhalb $1\frac{1}{11}$, das zweytemal innerhalb $2\frac{2}{11}$, das drittemal $3\frac{3}{11}$, u. s. w. Das letzte und eilftemal in $11\frac{10}{11}$ Stund, das ist um 12 Uhr: denn von dem Punkt 12 geht die Rechnung an. Die Aufgaben mit Vermischung der Weine gehören auch hieher; dazu braucht man aber nicht weitere Umstände zu wissen. Weil sie nun sehr leicht, und zuweilen durch die Regel Detri aufgelöst werden können; so wollen wir uns nicht damit aufhalten. Wir handeln daher nur mit

zwey

von solchen,
bey welchen
man die Bes-
griffe von
Zeit und
Raum nö-
thig hat.

zwei Worten noch von unbestimmten Aufgaben.

§. 134. Wenn man auf eine Frage vielerley richtige Antworten geben kann, so ist sie unbestimmt. Eine gleiche Beschaffenheit hat es mit den unbestimmten Aufgaben. Soll ich zu 2 und 6 die dritte und vierte Proportionalzahl suchen, oder einen Bruch finden, der $\frac{2}{6}$ gleich ist; so werde ich die Menge finden können, welche alle durch $\frac{2m}{6m}$ ausgedruckt werden.

Denn $\frac{4}{12}$, $\frac{6}{18}$, $\frac{8}{24}$, u. s. w. sind lauter Brüche, die dem obigen gleich sind. Folglich ist die Aufgabe unbestimmt. Diese unbestimmte Aufgaben können nun auf mancherley Weise vorgetragen werden, je nachdem man die Frage einrichtet. z. E. man will zwei Zahlen haben, deren Summe und Product einer gegebenen Zahl a gleich seyn; so wird nach der Bedingung des Problems seyn, wenn die zwei gesuchte Zahlen x und y genannt werden, $xy + x + y = a$, folglich

$$xy + x = a - y. \text{ Da nun}$$

$$xy + x = (y + 1) x \text{ nach §. 60. so ist}$$

$$x = (a - y) : y + 1.$$

y mag nun bedeuten, was es will, so wird die Frage aufgelöst seyn. Wenn z. E. $y = 2$, so ist $x = (a - 2) : (2 + 1)$; ist es

334 Arithm. V. Cap. Von Ausziehung

es = 3 so ist $x = (a - 3) : (3 + 1)$ u. s. w. Will man zwei Zahlen x und y finden, welche so beschaffen sind, daß das Quadrat der einen zur andern addirt, das ist $x^2 + y$ ein vollkommenes Quadrat seyen, deren Wurzel $x + y$ seye; so wird

$$\begin{aligned} x^2 + y &= (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\ \hline \text{folglich } y &= 2xy + y^2 \quad \text{und} \\ y - y^2 &= 2xy \\ \hline (1 - y) : 2 &= x. \end{aligned}$$

Wenn $y = \frac{1}{2}$, so ist $x = 1 - \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$ u. s. w. Man kann also für y einen Bruch setzen, was man für einen will; folglich ist auch dieses Problem unbestimmt. Daß es nun dergleichen unbestimmter Aufgaben eine Menge gebe, wird man leicht begreifen; wer sich üben will, kann sich also selbst nach Belieben solche aufgeben. Wir wollen daher unsere Leser auch damit nicht aufhalten; wenn sie nur wissen, was man unter den unbestimmten Aufgaben versteht. Ich glaube wenigstens, ich habe den Begriff davon hinlänglich erklärt. Denn er wird uns in der Geometrie bey den sogenannten geometrischen Orten wiederum vorkommen, und zu allerhand schönen Aufgaben Anlaß geben. Da nun in der allgemeinen Arithmetik, welche im Arabischen Algebra heißet, nichts weiter vorkommt,

Wie man sich
diesfalls üben
kann.

kommt, das zu wissen nöthig ist; so dürfen wir jezo diesen ersten Theil aller mathematischen Wissenschaften beschließen.

Unsere Leser werden sich übrigens über seine Grösse nicht beschweren: denn wir haben ihnen nicht eine bloße Rechenkunst, sondern die ganze Algebra nach ihren Hauptregeln in die Hände geliefert; da-
 ben aber mit Fleiß den arabischen Namen vermieden, weil es Leute giebt, welche durch die Eitelkeit ihres Wissens auf diesen arabischen Namen so stolz werden, daß sie dem ganzen Geschlechte der übrigen Gelehrten Troß bieten, wenn sie sich einbilden, sie seyen Algebraisten und Philosophen. Der Name Arithmetik ist daher viel bescheidener: darum haben wir ihn vorgezogen. Damit man uns aber für keine mathematische Sonderlinge halte, so melden wir diß einige noch, daß selbst der große Newton eine

Warum dieser erste Theil, als worinnen zu gleich die algebraischen Grundsätze ganz vorge- tragen wurden, etwas weitläufig ausgefallen seye;
 und warum man nichts destoweniger den algebraischen Namen vermieden, und ihm den Titel der Arithmetik vorgezogen habe.

vollständige Algebra unter dem Titel

Arithmetica universalis geschrie-

ben habe.



Innhalt der Geometrie.

§. 135.

Die Geometrie ist eine Wissenschaft der Grössen, in so ferne sie durch Figuren ausgedruckt werden, folglich eine Länge, Breite und Höhe haben, oder Linien, Flächen, und Körper sind; daher handelt man

I. überhaupt von der dreysfachen Ausmessung der Körper insgemein, und zwar

- 1) nach dem Längenmaas
- 2) nach dem Flächenmaas
- 3) nach dem Körpermaas;

II. insbesondere von Bestimmung und Ausmessung einiger wichtigen Theile der Grössen, deren Maas noch besondere Regeln erfordert, und zwar

- 1) in der Trigonometrie von dem Maas der Dreyecke,
- 2) in der Geometrie der krummen Linien von den Kegelschnitten oder conischen Sectionen, nebst noch einigen andern Gattungen der krummen Linien, wie auch von sogenannten geometrischen Orten, u. s. w.

III.

III. Von der Fluxionenrechnung oder von der Kunst zu differentliren und zu integriren, als welche beedes der allgemeinen und besondern Geometrie zu statten kommt, auch aus Betrachtung der geometrischen Figuren erfunden worden ist, folglich zur Geometrie mit Grund gerechnet wird.



I. Cap.

Von der dreysfachen Ausmessung der Körper überhaupt.

§. 136.

Wenn man sich einen richtigen Begriff von den geometrischen Größen bilden will, so muß man nicht von Punkten, sondern bey dem andern Ende von Körpern anfangen. Körper sind vorhanden, und man stellt sich selbst in der Geometrie als etwas zusammenhängendes, und dergestalten vor, daß, wo ein Theil aufhöret, sogleich der andere unmittelbar anfangt. Das ist das sogenannte Continuum. Ein Körper gehet nicht ohne Ende fort; er hat seine Grenzen, und diese Grenzen heißt man **Fläch**

Von dem Begriff der geometrischen Größen, was das Continuum sey,

was Flächen, Flächen. Die Fläche ist da, wo der Körper aufhört, und also kein Theil vom Körper: dann wo noch ein Theil vom Körper vorhanden ist, da hört er nicht auf. Wo Flächen aufhören, sind Linien, und wo Linien aufhören, Punkte. Der Punkt kann also nicht eher gedacht und vorgestellt werden, es sey dann, daß es Linien, Flächen und Körper gebe. Wofern aber eine stetige Ausdehnung vorhanden ist, die ihre Grenzen hat, so müssen sich diese Grenzen endlich in Punkte verlieren. Punkte sind also nichts, als die letzte Grenzen der Körper: dann Körper heißt man in der Geometrie alles dasjenige, was in die Länge, Breite und Höhe ausgedehnt ist. Die Grenzen der Körper sind Flächen; sie haben also eine Länge und Breite, aber keine Höhe, sonst wären sie keine Grenzen, sondern Theile des Körpers, oder wiederum Körper. Die Grenzen der Flächen sind Linien; sie haben also eine Länge, aber keine Breite, sonst wären sie Theile der Flächen, oder wiederum wirkliche Flächen. Die Grenzen der Linien sind Punkte; sie haben also keine Länge, sonst wären sie Theile der Linien, folglich wiederum Linien, und keine Punkte. Aus gleichem Grunde erhellet, daß die Punkte noch vielweniger eine Breite und Dicke haben; sonst wären sie Flächen oder gar Körper, und könnten

was Linien
und was
Punkte über-
haupt seyen;

warum es
Punkte gebe;

was ein Kör-
per seye,

warum eine
Fläche keine
Höhe,

eine Linie
keine Breite,

und ein Punkt
keine Länge,
folglich gar
keine Aus-
dehnung ha-

ten

ten daher nicht die äußerste und letzte, und die Grenzen aller Körper heißen. Darum sagt man, ein Punkt sey untheilbar, und die Untheilbarkeit wird der Verstand aus der gegebenen Erklärung leicht begreifen.

Eben so wird man auch aus den bisherigen unlaugbaren Gründen einsehen, warum eine Linie nicht aus Punkten bestehen könne, oder warum die Punkte keine Theile der Linien seyen, und wie die sonst hier einkommende Einwände auf einmal durch die gegebene Erklärung abgeschnitten werden.

Insgesamt sagt man: eine Linie entstehe durch einen bewegten Punkt; oder der Weg, den ein Punkt durch seine Bewegung zurück lege, sey eine Linie. So viel richtiges dieser Ausdruck auch haben mag, so gab er doch je und je zu irrigen Gedanken Anlaß genug.

Dann davon will ich nicht reden, daß diese Erklärung den Begriff einer Linie schon voraussetze, weil sich die Bewegung eines Punktes ohne eine gewisse Richtung nicht gedenken läßt, eine Richtung aber, wornach er sich bewegt, allemal eine Linie ist; sondern das solle jezo gezeigt werden, wie die letztere Erklärung einen ganz natürlichen auf die Gedanken bringe, eine Linie bestehe aus Punkten.

Ein Punkt beschreibt durch seine Bewegung eine Linie; wann sich also der Punkt A nach Z bewegt, so läßt er

Ob eine Linie aus Punkten bestehen könne?
Was von der Erklärung der Linie durch die Bewegung eines Punktes zu halten seye, und wie diese Erklärung den Begriff der Linie schon voraussetze;
woher es komme, daß manche sich

einbilden, die
Linien bestes-
ten aus an-
einander
gränzenden
Punkten, und
wie sie ihre
Reyhung
mit Schein-
gründen un-
terstützen.

überall Spuren und Merkmale

A ————— Z
B C D E

in B, C, D u. s. w. von sich zurücke; folglich wird die Summe aller dieser Merkmale, das ist die Summe aller Punkte, zusammengenommen, die Linie AZ bestimmen. Nun will ich zeigen, wie man auf diese Erklärung der Linie gekommen ist. Die Linie AZ kann eher noch aufhören, als erst in Z; sie kann z. E. in B, C, D u. s. w. aufhören; wo sie nun aufhört, da giebt es Punkte. Ja weil sie, wie wir hören werden, unendlich theilbar ist, so kann sie an unendlich viel Orten aufhören; folglich giebt es in der Linie AZ unendlich viele Punkten. Demnach ist es eben so viel, als wenn der Punkt A sich nach und nach bis Z bewegte, und durch diese Bewegung die Linie erzeugte, aber auch zugleich überall Spuren seines Daseyns, das ist, Punkte zurück ließe. Nun müssen wir auf diesen Einwurf, durch welchen manche scharfsinnige Gelehrten sich je und je haben irre machen lassen, umständlich antworten. Die Sache hat ihre Richtigkeit. Die Linie AZ kann an unendlich vielen Orten aufhören, und wo sie aufhört, da giebt es Punkte; darum lassen sich unendlich viele Punkten in der Linie AZ gedenken. Das ist unlaugbar, aber die Folge ist nicht rich-

Beantwor-
tung dieser
Gründe, nebst
einem aus-

richtig: Es giebt überall Punkte in der fäbrlichen Linie, darum besteht die Linie aus Punkten; denn wenn wir die Erklärung des Punktes in diesem Schluß für den Punkt selbst setzen, so heißt er so: die Linie kann aufhören, wo man will; folglich besteht sie aus den Grenzen, an welchen sie aufhört. Diese Folge ist grundfalsch. Wir wollen ein Exempel geben. Ein Capital soll ein Vermögen von 100000 fl. haben: dieses kann nun auf unendlich viele Weise kleiner werden; und es bleibt doch noch ein Vermögen. Z. E. es kann aufhören bey 100, bey 200, bey 300, bey 1000, bey 10000. fl. u. s. w. Die Grenzen, wo es aufhören kann, gehören nicht mehr zum Vermögen; sonst wären es nicht die Grenzen, sondern noch ein Theil des Vermögens. Wenn ich nun sagte, weil das Vermögen von 100000 fl. aufhören kann, wo man will, so besteht es aus den Grenzen, wo es aufhört: wie ungereimt wäre dieses gedacht, und wie leicht wäre es einem reich zu werden, wenn die Folge wahr wäre, ein Ding bestehet aus den Grenzen, wo es aufhören kann? Es ist noch ein Einwurf übrig. Man sagt, die Linie AD solle von der Linie AE nur so unterschieden seyn, daß nur ein einziger Punkt den Ueberschuß ausmache, und folglich D und E zwey unmittelbar an einander gehende Punkte seyen.

fäbrlichen
Beweis, daß
die Linie
nicht aus
Punkten be-
stehe, oder
daß die Punk-
te keine Theile
der Linien
seyn;

Warum es
unmöglich,
daß zwey

Punkte ein-
ander unmittel-
bar berüh-
ren;

und wie des-
wegen eine
Linie, wenn
sie auch un-
endliche mal
getheilt wür-
de, immer in
Linien ge-
theilt werde,
dahero die
Linie unend-
lich theilbar
ist.

Eine solche Nachbarschaft der Punkte er-
kennt die Geometrie nicht. Wir wollen
aber darauf antworten, und die Unmög-
lichkeit der Bedingung zeigen. D ist die
Grenze von AD, und E die Grenze von AE.
Zwischen E und D ist keine Entfernung,
das ist ED hat nach der Bedingung des
Einwurfs keine Länge mehr, weil der
Punkt E unmittelbar an D grenzet, und
dahero keine Zwischenlinie übrig läßt.
Folglich ist DE keine Linie oder keine Ent-
fernung, dahero $AD + DE = AD$, und
also $AE = AD$. Die beide Linien AD
und AE sind also gleich lang, demnach
hören sie an einem Orte auf; folglich ist
D und E nur ein Punkt. Hieraus ist nun
klar, daß der obige Einwurf etwas wi-
dersprechendes in sich halte; denn es wür-
de daraus folgen, zwei gleich lange Li-
nien seyen nicht gleich lang. Wenn aber
die Theile der Linien wiederum Linien sind,
und sich so viel Linien denken lassen, als
Punkte sind, in welchen eine Linie durch-
schnitten wird; so ist klar, daß die Thei-
lung der Linien ins unendliche fortgehen
konne, weil man niemalsen auf Punkte
kommt, sondern immer Linien erhält, wel-
che wieder theilbar sind; dahero die Linie
unendlich theilbar ist. Das was wir bis-
her gesagt haben, trägt der berühmte Hr.
Prof. Kästner in einem besondern Auf-
satz, der in des Hamb. Magazin IV.
Band

Band. S. 46. folgg. zu lesen ist, mit mehrerem vor. Es wird daher unsern Lesern nicht unangenehm gewesen seyn, daß auch wir diese wichtige Grundbegriffe von Flächen, Linien und Punkten umständlich erläutern haben; weil doch ungemein viel darauf ankommt, daß man die erste Gründe aller Wissenschaften recht inne habe.

§. 137. Ehe wir weiter gehen, müssen wir auch die geometrische Sprache und Schreibekunst erläutern. Es fragt sich billig: wie man Punkte, Linien, Winkel, Figuren u. s. w. schreiben und recht lesen oder aussprechen solle? In der ersten Tafel der geom. Figuren kommen dergleichen Zeichnungen vor. Man schreibt eine Linie, wenn man an ihren beiden Enden grosse Buchstaben setzt, und sie hernach zusammen verbindet, da es dann heißt, die Linie AB, die Linie AC, die Linie AE; will man sich der Kürze befleißigen, so kann man auch eine Linie durch einen einigen kleinen Buchstaben ausdrücken, und z. E. sagen, die Linie AB solle a oder b, oder x heißen, je nachdem sie bekannt oder unbekannt, folglich erst zu suchen ist. Wir werden uns aber des ersten Ausdrucks öfters bedienen. Ein Winkel ist die Neigung zweyer Linien, die in einem Punkt zusammen stoßen. Man schreibt ihn auf eine doppelte Weise.

Von der geometrischen Sprache und Schreibekunst.

Tab. I. Wie Fig. 2. man eine Linie schreibe und ausspreche?

Tab. I. Die Fig. 3. Art einen Winkel zu schreiben

und auszu-
drucken, wel-
ches auf eine
doppelte Wei-
se geschehen
kann,

erste Art,

zweite Art
des Aus-
drucks.

wie ein Drey-
eck geschrie-
ben werde;

Tab. I.
Fig. 8.

Dann entweder braucht man drey gröf-
fere Buchstaben, und setzet sie an die Gren-
zen der Linien, da dann im schriftlichen
Ausdruck derjenige Buchstabe jedesmal
in die Mitte gesetzt wird, der an der Nei-
gung der beeden Linien steht. Z. E. ABC
heißt der Winkel ACB, und nicht ABC
oder BAC; weil C die Neigung der bee-
den Linien ausdrückt, folglich in der Mit-
te stehen muß. Die andere Art ist, wenn
man innerhalb des Winkels, wo die Nei-
gung ist, einen kleinen Buchstaben, o, x,
y, n, u. s. w. hineinschreibet, und sodann
sagt, der Winkel o, der Winkel x, u. s. w.
Beede Schreibarten werden gebraucht, je
nachdeme die Schicklichkeit der Rechnung
es erfordert. Ein Dreyeck wird durch die
an den drey Ecken der Figur benzesetzte
und sodann zusammengeschriebene gröf-
fere Buchstaben ausgedrückt, woben ge-
meiniglich zum Unterschied von den Wink-
eln ein Δ den Buchstaben vorangesetzt
wird. Z. E. das Δ ABC, heißt das
Dreyeck ABC. Da es dann gleichgültig
ist, wie die Buchstaben verbunden wer-
den, ob sie ABC, oder ACB, oder CAB,
u. s. w. heißen. Wie man den Inhalt
eines Dreyecks ausdrücke, werden wir an
seinem Ort zeigen: denn wenn die Grund-
linie b, und die Höhe a heißet, so ist der
Inhalt $\frac{a}{2} b$; dieses aber gehört noch nicht

hier

hieher. Einem Viereck werden an den vier Ecken gleichfalls grössere Buchstaben zu gegeben, welche sodann im Schreiben zusammen gesetzt werden, z. E. das Viereck ABCD. Wenn man nicht gern so viel Buchstaben schreibt, so setzt man zuweilen die einander creuzweis entgegen stehende Buchstaben zusammen, und sagt das Viereck AC oder DB. u. s. w. Wie man es durch die Multiplication der Grundlinie b, in die Höhe a, welches ab giebt, u. s. w. ausdrücken könne, wollen wir an seinem Ort zeigen. Ein Bogen, oder überhaupt eine frumme Linie, wird wie eine gerade Linie geschrieben und ausgesprochen; so sagt man z. E. der Bogen AS, der Bogen SR u. s. w. Punkte werden durch einzelne Buchstaben angezeigt; so sagt man der Mittelpunkt C, der Punkt A, der Punkt B u. s. w. Das sind bey nahe die vornehmsten Ausdrücke, die man sich in dem geometrischen Alphabet zuerst bekannt machen muß. Wir werden, wenn wir weiter kommen, wie bey der Arithmetik, also auch in der Geometrie die noch rückständigen Ausdrücke nach und nach in derjenigen Ordnung vollends hinzuthun, in welcher sie erklärt und von den Lesern verstanden werden können. Anfänger haben inzwischen an dem bisherigen genug.

wie ein Viereck,

Tab. II.
Fig. 25.

ferner wie ein Bogen oder eine frumme Linie über

Tab. I.
Fig. 4.

haupt, und wie die Punkte ausgedrückt werden.

Der erste
Theil der
dreyfachen
Ausmessung
begreift das
Längenmaas.

Wie man ei-
ne Länge oder
Linie messen
konne ;

und beson-
ders wie die
gerade und
hernach wie
die krumme
Linien in Ab-
sicht auf ihr
Maas anzus-
sehen seyen.

§. 138. Nun kommen wir der Hauptsache näher, und tragen von der dreyfachen Ausmessung der Körper denjenigen Theil zuerst vor, der das Längenmaas oder die Longimetrie in sich begreift. Eine Länge wird durch eine Länge, wie eine Breite durch eine Breite und ein Körper durch einen Körper ausgemessen. Da sich nun eine bloße Länge allemal durch eine Länge ausdrücken läßt; so siehet man, daß Linien und Längen hier einerley heißen, folglich das allgemeine Maas in der Longimetrie Linien seyen. Nun giebt es gerade und krumme Linien: die gerade werden durch gerade Linien ausgemessen; bey den krummen kommt es auf die Frage an, ob ich die Länge der Linien an und vor sich selbst, oder nur ihre Krümme, theils überhaupt, theils nach ihrer bestimmten Größe wissen will. In jenem Fall muß ich sie gerade machen oder rectificiren; diese schwere Kunst gehört noch nicht in dieses Capitel. Im letztern Fall muß ich eine krumme Linie von ihrer Art zum Maas nehmen, daß ich sagen kann, sie gehört zu dieser oder jenen Classe der krummen Linien; dann sie hat diese oder jene Eigenschaft, welche die mir bekannte krumme Linie auch hat. Habe ich nun dieses einmal gefunden, so suche ich die Größe der krummen Linie, das ist, die Verhältniß des auszumessenden Theils zu der ganzen.

krum-

krummen Linie, von deren Gattung der gegebene Theil ist. Auch diese Kunst ist, wenn ich die einige Circellinie ausnehme, jezo noch zu hoch, und kann in dem gegenwärtigen Capitel nicht vorgetragen werden. Wir werden daher nur von geraden und circelförmigen Linien handeln. Eine gerade Linie ist der kürzeste Weg, oder die kürzeste Entfernung zwischen zweyen Punkten; man muß aber die mathematische Linie als eine solche Linie vorstellen, die durch alles dringt, und von dem härtesten Marmor nicht aufgehalten wird. So ist z. E. der kürzeste Weg von dem Punkt, worauf ich aufstehe, zu meinen Gegenfüßlern in America die Linie, die mitten durch die Erde durchgeht, und sich nichts in den Weg legen läßt; man siehet daher schon, wie der kürzeste Weg hier verstanden werde. Ein Seefahrer kann nicht anders als durch eine zu Wasser beschriebene krumme Linie nach America kommen; und doch ist diß, wenn er durch keinen Sturm zerschlagen wird, der kürzeste Weg, der ihm äußerlich möglich ist. Allein er macht ihn auch wirklich, und nicht blos in Gedanken, wie der Meßkünstler, der seine mathematische Linie blos in Gedanken durch die Erde hindurch zieht. Inzwischen siehet man schon, daß solche mathematische Linien möglich sind; dann was sich denken läßt, ist

Warum man in diesem Capitel nur von geraden, und unter den krummen Linien, von keinen andern als von Circellinien handle.

Was eine gerade Linie sey;

und wie man sich die mathematische Linie vorstellen müsse;

wie auch, was man unter dem kürzesten Weg im absoluten und mathematischen Begriff verstehe;

Möglichkeit
der mathe-
matischen
Linien.

Warum es
nur eine Clas-
se von gera-
den Linien
gebe, und
warum durch
zwey Punkte
allemaal eine
gerade Linie
nicht aber ei-
ne krumme,
bestimmt
werde?

Warum es so
mancherley
krumme Li-
nien gebe;

und wie man
sich selbige
durch die Be-
trachtung der
Natur be-
kannt ma-
chen könne;

ist möglich. Nun läßt sich eine Linie im Gedanken durch die Erde ziehen; folglich sind dergleichen mathematische Linien nichts widersprechendes. Weil ferner zwischen zween Punkten nur ein einziger Weg sich denken läßt, der der aller kürzeste heißet; so ist ganz natürlich, daß es nur eine einzige Classe von geraden Linien gebe, und daß folglich in mathematischem Verstand keine mehr oder weniger gerade als die andere sey. Eben so erhellet auch, daß eine gerade Linie durch zwey Punkte vollkommen bestimmt werde, weil zwischen zween Punkten nicht mehr als eine gerade Linie möglich ist. Hin- gegen von krummen Linien wird es ei- ne Menge Gattungen geben; man darf nur auf dem Papier zwey Punkte anneh- men, und es versuchen, ob man nicht durch eine Menge krummer Linien von einem Punkt zum andern kommen könne. Eben so kann man durch die Betrachtung der Natur die Verschiedenheit der krum- men Linien erkennen. Die Circellinie ist die allergemeinste. Wenn ich aber nur ein Ey ansehe, so sehe ich schon eine an- dere Gattung von krummen Linien, wel- che man die Ovallinie heißt; sehe ich ein Schneckenhaus an, so sehe ich eine neue Gattung krummer Linien, welche deswegen Schneckenlinien genannt werden u. s. w. Da es nun so eine unzählbare Menge von

von krummen Linien giebt, so ist es gar kein Wunder; daß die Erfindungskunst besonders in der sogenannten höhern Geometrie immer mehr bereichert, und mit neuen Exempeln vermehret wird. Weil aber keine gemeiner ist, als die Circellinie, so hat man sie sogleich schon von Alters her je und je in den ersten Gründen der Geometrie vorgetragen, und das mit desto größerm Recht, weil sie das Maas der Winkel zu bestimmen unumgänglich nöthig, und die Lehre von den Winkeln eine der ersten und vornehmsten Lehren in der Geometrie ist; wie wir sogleich hören werden.

Warum die Circellinie gleich anfangs in den geometrischen Lehrbüchern erklärt werden mußte.

§. 139. Gerade Linien werden durch gerade Linien gemessen. Denn messen heißt nichts anders, als anzeigen, wie oft eine Linie in der andern enthalten seye, oder wie sich eine gegebene Linie zu einer andern verhalte. Man nimmt also zum Maasstab eine Linie an, welche man eine Ruthe nennt, und durch das hinten angehängte Zeichen r° schreibet; der zehente Theil einer Ruthe heißt ein Schuh, und wird geschrieben r' , der zehente Theil eines Schuhs heißt ein Zoll, und wird geschrieben r'' , und der zehente Theil eines Zolles heißt eine Linie, und wird geschrieben r''' . So theilet die Geometrie ihr Längenmaas, und hat dabey den Vortheil, daß sie durch Hülfe der Decimal-

von dem Maas der geraden Linien, an und vor sich selbst, was zu man Ruthen, Schuhs, Zolle und

thig hat, nebst einer Erklärung

pro

dieser Rechnung.

progression und Decimalbrüche, eine Linie nicht nur kurz ausdrücken, sondern auch, wenn man multiplicirt und dividirt, Zeit und Mühe ersparen kann. So sind z. E. 36482 Linien, $36^{\circ} 4' 8'' 2'''$ das ist, 36 Ruthen, 4 Schuhe, 8 Zoll, 2 Linien. Die gemeine Feldmesser hingegen gehen von diesem Maase ab, und man merkt fast in einem jeden Land eine Verschiedenheit; bey uns hat die Ruthe 16 Schuhe, ein Schuh 12 Zoll u. s. w. Wir werden aber künftighin die eigentlich geometrische Rechnung gebrauchen, und, wo nichts besonders angemerkt wird, allemal geometrische Ruthen, Schuhe, Zoll und Linien verstehen.

Von dem Maas der Neigung zweier geraden Linien gegen einander, oder von dem Winkelmaas;

was ein Winkel seye,

und wie man hier nur von geradelinichten und nicht

§. 140. Man mißt die gerade Linien nicht nur an und vor sich selbst, in so ferne sie solche gerade Linien sind, sondern man kann auch ihre Verhältnisse ausmessen. Eine der ersten und vornehmsten Verhältnisse zweyer geraden Linien gegen einander bestehet darinnen, wenn sie durch eine gewisse Neigung gegen einander in einem Punkte endlich zusammen stossen; da man dann die Grösse dieser Neigung zu wissen verlangt. Man heist eine solche Neigung einen geradelinichten Winkel; dann es giebt auch krummlinichte Winkel. Wir werden aber, um uns kürzer ausdrücken zu können, so oft wir das Wort Winkel ohne einen Beynamen gebrauchen,

chen, einen geradelinichten Winkel darunter von ~~krummlinichten~~
 verstehen; wo wir aber, welches selten ^{linichten}
 geschehen wird, krummlinichte nöthig ha ^{Winkeln}
 ben, das letztere Benwort hinzusetzen. Nun
 fragt man, wie die Neigung zweyer ger
 raden und in einem Punkt zusammen
 kommender Linien gegen einander, das ist, ^{Warum man}
 wie ein Winkel ausgemessen. werde? ^{einen Winkel}
 Durch eine gerade Linie kommt man hie ^{nicht durch}
 nicht zu recht. Denn wenn ich den Wink ^{gerade Linien}
 fel ACB durch eine gerade Linie ausmes ^{messen könne.}
 sen wollte, so müßte ich in der Linie AC ^{Tab. 1.}
 und BC Punkte annehmen, und zwischen ^{Fig. 3.}
 selbigen Linien ziehen. Nun giebt es in
 diesen beiden Linien eine Menge von Punk
 ten. S. 136. Folglich liesse sich auch eine
 Menge von Linien ziehen, davon immer
 eine grösser als die andere würde, je nach
 deme ich dem Punkt C mehr oder weniger
 nahe käme. Ich würde also kein bestimm
 tes Maas für den Winkel ACB finden ^{Wie man das}
 können. Man versucht daher die Art ^{hero eine}
 beit mit krummen Linien, und weil wir ^{krumme Linie}
 in der gemeinen Geometrie keine andere ^{zu seinem}
 als Circellinien wissen, vornemlich mit ^{Maas nöthig}
 Circelbögen. Dieses zu bewerkstelligen, ^{habe;}
 müssen wir wissen, was ein Circel sene. ^{und wie diese}
 Ein Circel entsteht, wann sich eine gerad ^{Linie die Cir}
 de Linie um einen festen Punkt herum be ^{cellinie sene;}
 weget. Z. E. die Linie AC solle sich um ^{Tab. 1.}
 den festen und unbeweglichen Punkt C her ^{Fig. 4.}
 um bewegen, daß sie nach und nach die
 Linie

Erklärung
des Cirkels,
und der da-
bey vorkom-
menden Na-
men,
der Periphe-
rie,

des Mittel-
punkts,

des Radius,
woben ge-
zeigt wird,
daß alle Radii
einander
gleich seyen,

der Sehnen,

des Diamo-
ters, welcher

Linie SC, RC, CB, CI bedeckt, und end-
lich wieder in AC kommt; so wird die
daraus beschriebene Figur ein Cirkel, und
die äußerste krumme Linie ASRBIA die
Peripherie des Cirkels genannt. Man
kann die gegebene genetische Erklärung
des Cirkels durch einen gemeinen Ver-
such, z. E. durch einen Faden, der im-
mer in gleicher Länge gehalten, und um
einen Punkt herum bewegt wird, leicht
in die Übung bringen. Der Punkt C,
um welchen die Bewegung geschieht,
heißet der Mittelpunkt. (Centrum.)
Die herumbewegte Linie, (oder im Exem-
pel, der herumbewegte Faden) heißt
der Radius. Da nun diese Linie über-
all im Cirkel sich selbst gleich bleibet, so
ist klar, daß alle Radii, das ist, alle
gerade Linien, die von dem Mittelpunkt
an die Peripherie gezogen werden, ein-
ander gleich seyen. Demnach sind
AC, CS, CR, CB, CI, als Radii des
Cirkels, einander gleich. Es sind noch
einige gerade Linien im Cirkel übrig.
Eine Linie, die von einem Punkt der Pe-
ripherie D zum andern E gezogen wird,
und nicht durch den Mittelpunkt gehet,
heißt überhaupt eine Sehne; (Chorda)
z. E. die Sehne DE. Gehet sie aber
durch den Mittelpunkt C, so heißt sie der
Diameter (Durchmesser). z. E. die Linie
AB; folglich ist der Diameter der dop-
pelte

pelte Radius , weil $AB = AC + CB$ der doppelte $= 2 AC$. Wenn also der Radius r heißt, Radius ist , so darf ich allemal für den Diameter $2r$ u. s. w. setzen. Ferner ist aus gleichem Grunde der Radius allemal der halbe Diameter :

$$\text{dann } AB = 2 AC$$

$$\text{und daher } \frac{AB}{2} = AC$$

Wenn also der Diameter a heißet , so wird der Radius $\frac{1}{2}a$ seyn. Die Theile der Peripherie heißt man Bögen; z. E. der Bogen AS , der Bogen SR , der Bogen RB u. s. w. Den Cirkel beschreibt man durch ein unsern Lesern so bekanntes Instrument, daß es unnöthig wäre, es erst zeichnen zu lassen. Wir merken nur so viel, daß das Instrument selbst der Zirkel mit dem Z , (Circinus lat. und französisch Compas) die dadurch beschriebene Figur aber ein Cirkel mit dem C heißet, (lat. Circulus, französisch Cercle). Die krumme Linie, das ist die Peripherie des Cirkels, wird in 360 gleiche Theile eingetheilt, weil sich diese Zahl mit vielen andern leicht und ohne Rest dividiren läßt. Diese Eintheilung ist willkührlich; dann man könnte des Cirkels Umfang eben sowohl in 1000, oder 100, oder 60 Theile u. s. w. theilen; wir haben aber schon gesagt, warum man die Eintheilung in 360 gewählt und vorgezogen habe. Derjenige kleine Cirkelbogen, welcher

Die Theile der Peripherie heißen Cirkelbögen oder schlechweg in der gemeinen Geometrie Bogen;

Von dem Instrument, womit ein Cirkel beschrieben wird.

Warum die Peripherie des Cirkels gerade in 360 Theile getheilt werde,

und wie ein solcher Theil ein Grad, und der sechzigste Theil eines Grades eine Minute u. s. w. genannt werde;

Erklärung
der Sexagesimalrechnung, welche hier vorzüglich und fast allein gebraucht wird, und zu wissen nöthig ist.

Der der 360ste Theil von seinem ganzen Cirkel ist, heißt allemal ein Grad, und wird wie ein Längenmaas geschrieben 1° ; der sechzigste Theil eines Grades heißt eine Minute (*minutum primum*) und wird geschrieben $1'$; der sechzigste Theil einer Minute heißt eine Secunde (*minutum secundum*), und wird geschrieben $1''$; der sechzigste Theil einer Secunde heißt eine Terz, (*minutum tertium*) und wird geschrieben $1'''$ u. s. w. Folglich gehet hier die Rechnung nach Sexagesimalbrüchen, bey welchen die Zehler eins, und die Nenner in einer geometrischen Progression fortgehen, deren Exponent 60 ist, z. E. $1, \frac{1}{60}, \frac{1}{60 \cdot 60}, \frac{1}{60 \cdot 60 \cdot 60}$ u. s. w. Denn dieser Ausdruck heißt eben so viel, als ein Grad, eine Minute, eine Secunde, und eine Terz; folglich kann ich ganze Zahlen dafür setzen, wie bey den Decimalbrüchen, wenn ich nur die Nenner im Sinn hinzudenke, wiewohlen die Namen Minute, Secunde, Terz u. s. w. wirklich die Nenner anzeigen; man kann daher die vier Rechnungsarten wie bey genannten Zahlen hier anbringen, wenn man nur weiß, daß allemal sechzig Minuten ein Grad, 60 Secunden eine Minute u. s. w. machen. Hier sind nun die gemeine Feldmesser der Geometrie getreuer als bey dem Längenmaas: dann überall wird der Cirkel in 360 Grade, und der Grad

Grad in 60 Minuten u. s. w. eingetheilt.

Diese Eintheilung ist bey allen Eirkeln, sie mögen groß oder klein seyn, angenommen; nur sind die Grade bey einem grossen Eirkel grösser, als bey einem kleinen u. s. w. Man siehet daher schon, wie man einen Bogen misst, und wie seine Grösse durch die Anzahl der Grade, die er hat, bestimmt wird. Eben so begreift man, wie ein Winkel gemessen werde.

Denn zwischen den beeden Linien, welche einen Winkel durch ihre Neigung bestimmen, läßt sich allemal ein Eirkelbogen beschreiben, wenn man den einen

Schenkel des Zirkelinstruments in den Punkt C, wo die Linien zusammen stoßen, sezet, und hernach mit beliebiger

Eröffnung den Bogen DB beschreibt. Allein jezo werden meine Leser die obige Gedanken von den geraden Linien auch hier anbringen und sagen: man kann eine Menge von Punkten in den beeden Linien CD und CB annehmen, und hernach Bögen zwischen denselben beschreiben; folglich haben wir auch hier kein bestimmtes Maas für den Winkel, wenn wir schon die gerade Linien ausgemustert und Eirkelbögen dafür angenommen haben. Es ist der Mühe werth, daß man darauf antwortet.

Ich sage, es ist gleichviel, ob ich mit einer grossen oder kleinen Eröffnung des Zirkels den Bogen beschreibe;

Warum ein grosser, wie ein kleiner Eirkel, einerley Anzahl von Graden habe, und wie das Maas eines Winkels durch die Anzahl der Grade, die der zwischen seinen Schenkeln gezogene Bogen hält, bestimmt werde;

Tab. I.
fig. 5.

nebst einer Anzeige, wie der Bogen beschrieben werden müsse.

Was von dem Einwurf zu halten, wenn man sagt, man könne zwischen den Schenkeln eines Winkels unendlich viel Bögen ziehen, deren immer

einer grösser
als der ande-
re, folglich
seye das
Maas des
Winkels
auch im Cir-
kelbogen un-
bestimmt;

Beantwor-
tung dieser
Gedanken,
nebst einer
umständli-
chen Anzeige,
warum es
gleichviel
seye, ob man
mit einer
grossen oder
kleinen Er-
öffnung des
Cirkels den
Bogen be-
schreibe,
und wie ein
kleiner Bo-
gen zwischen
einerley
Schenkeln
des Winkels
eben so viel
Grade halte
als ein gros-
ser.

dann alle Bogen zwischen CD und CB
sind in Rücksicht auf die Anzahl ihrer
Grade einander gleich. Darum ist so-
wohl db als DB das Maas des Winkels
DCB oder n. Diß wird sich bald zeigen.
Man darf nur den Cirkel oder halben
Cirkel vollends beschreiben, so hat man
ADB und adb; Nun ist DB ein eben so
grosser Theil von seinem halben, folglich
auch ganzen Cirkel ADB, als db von dem
seinigen abd ist. Weil nun der grosse
wie der kleine 360° enthält, so werden
auch die Stücke db und DB eine gleiche
Anzahl Grade und Minuten haben; nur
werden die Grade von db kleiner als die
von DB seyn, weil die Grade vom klei-
nern Cirkel überhaupt kleiner als die vom
grössern sind. Daran aber ist nichts ge-
legen. Denn ich will nicht wissen, wie
gross der rectificirte Bogen DB, oder der
in eine gerade Linie zu verwandelnde Bo-
gen DB seye, sondern wie gross er als ein
Bogen seye, das ist, wie viel er Grade
habe, oder der wievielte Theil er von sei-
nem ganzen Cirkel seye? Das finde ich
nun, ich mag den Cirkel mit einer gros-
sen oder kleinen Oeffnung des Instru-
ments beschrieben haben. Nun glaube
ich, erwiesen zu haben, daß es gleichviel
seye, ob man einen Winkel durch einen
dem Punkt C mehr oder weniger nahen
Bogen ausmesse. Warum man aber
Ein

Eirkelbögen überhaupt zu diesem Maas nöthig habe, ist aus der Natur der Winkel klar. Ein Winkel kann entstehen, wenn sich von zwei auf einander liegenden geraden Linien die eine von der andern ohne Krümme hinweg beweget, doch so, daß sie immerdar an dem äussersten Punkt mit der andern noch zusammen hängt. Durch diese Bewegung können nun keine andere als Eirkelbögen entstehen. Man darf nur das Instrument, das der Zirkel genannt wird, nach und nach öffnen, so werden immer grössere Winkel dadurch, aber auch zugleich und mit den Winkeln Eirkelbögen entstehen; welche folglich das Maas der Oeffnung oder ihre Grösse bestimmen. Unsere Leser wundern sich ja nicht, daß wir so umständlich von diesen Materien handeln. Es ist an den ersten Grundideen, wie in allen Wissenschaften, also auch in der Mathematik, ungemein viel gelegen. Der Hr. von Leibniz pflegte deswegen zu sagen: er seye ein Gegenfüßler der gemeinen Gelehrten, was diesen am leichtesten vorkomme, nemlich die Lehre von den ersten Grundsätzen, das sey ihm am schwersten; hingegen werde ihm hernach dasjenige desto leichter, was ihnen schwer und unauslößlich seye. Was nun die wirkliche Ausmessung der Winkel betrifft, so geschiehet sie durch den sogenannten Transporteur; wel-

Warum man bloß Eirkelbögen und keine andere krumme Linien zum Maas der Winkel gebrauchen könne, wird aus der Natur, wie ein Winkel entstehen kann, erwiesen.

Warum man diese Lehre so umständlich abhandle,

Warum man von der praktischen Ausmessung der Winkel und folglich auch von dem sogenannten Transporteur nicht besonders

händte, und wie ein Geometra nichts als den Zirkel und das Lineal nöthig habe.

Von den verschiedenen Verhältnissen der Winkel gegeneinander.

was Perpendicularlinien seyen, und wie durch dieselbe rechte Winkel entstehen,

was stumpfe und spizige Winkel seyen.

Warum alle aus einem Punkt auf einer geraden Linie gezogene

welcher aber zum practischen Ausmessen gehöret. Die Theorie kann ihn entbehren. In der Euclidischen Schule dürfte man so nichts weiter als den Zirkel und das Lineal gebrauchen.

§. 141. Nunmehr können wir schon weiter gehen, und die verschiedene Verhältnisse der Winkel gegen einander betrachten. Wenn eine gerade Linie auf einer andern also aufstehet, daß sie sich auf keine Seite mehr als auf die andere neiget, so stehet sie perpendicular, oder senkrecht; und ein Winkel, der durch zwei auf einander perpendicular stehende Linien gemacht wird, heisset ein rechter Winkel. (angulus rectus). Diejenige Winkel, die grösser sind als ein rechter, heissen stumpfe (obtusi), welche aber kleiner sind, heissen spizige Winkel. (anguli acuti.) Nun kann ich auf einer jeden geraden Linie einen halben Cirkel beschreiben, wenn ich einen Punkt nach Belieben annehme, und die eine Spitze des Zirkels auf den Punkt setze, mit der andern aber nach beliebiger Eröffnung die Cirkellinie beschreibe. Da ich aber auch aus jedem Punkt einer gegebenen Linie, andere gerade Linien ziehen kann, wodurch Winkel bestimmt werden: so müssen alle auf einer Linie aus einem Punkt gezogene Winkel zusammen einem halben Cirkel, das ist $\frac{360}{2} = 180^\circ$ gleich seyn: und weil sich auf einer jeden Linie

Linie eine Perpendicularlinie gedenken läßt, die Perpendicularlinie aber auf beiden Seiten rechte Winkel macht, so müssen auch zween rechte Winkel 180° gleich seyn; folglich wird ein rechter Winkel, die Hälfte von zween, auch der Hälfte von 180° das ist 90 Graden, oder dem vierten Theil des Cirkels, gleich seyn. Diese Sätze lassen sich nun auch aus den Figuren beweisen. Man heist diejenige Winkel, welche auf einer Linie aufstehen, und aus einem Punkt gezogen werden, Nebenwinkel (anguli contigui, vel deinceps positi). Demnach sind die Winkel ACD und DCB, oder m und n Nebenwinkel. Das Maas des Winkels m ist der Bogen AD, und das Maas des Winkels n der Bogen BD. §. 140. Folglich ist

$$m = AD$$

$$n = BD$$

$$m + n = AD + BD$$

$$180^\circ = AD + BD.$$

$$m + n = 180^\circ.$$

Wenn also der eine Winkel z. E. m gegeben, und 120° gleich wäre, so würde der andere leicht sich finden lassen; er wäre nemlich $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

$$\text{Dann } m + n = 180^\circ$$

$$\text{nun seye } m = 120^\circ$$

$$\text{folglich } n = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

3 4

Wenn

ne Winkel 180° zusammen ausmachen, oder zween rechten Winkeln gleich seyn, und wie ein rechter Winkel allemal 90° halbe;

Was Nebenwinkel seyn,

Tab. I
fig. 5.

und wie alle Nebenwinkel zusammen 180° halben,

und wie man aus einem gegebenen Nebenwinkel den andern finden könne.

hantle, und wie ein Geometra nichts als den Zirkel und das Lineal nöthig habe.

Von den verschiedenen Verhältnissen der Winkel gegeneinander.

was Perpendicularlinien seyen, und wie durch dieselbe rechte Winkel entstehen,

was stumpfe und spitzige Winkel seyen.

Warum alle aus einem Punkt auf einer geraden Linie gezogene

welcher aber zum practischen Ausmessen gehöret. Die Theorie kann ihn entbehren. In der Euclidetschen Schule dürfte man so nichts weiter als den Zirkel und das Lineal gebrauchen.

§. 14. Nunmehr können wir schon weiter gehen, und die verschiedene Verhältnisse der Winkel gegen einander betrachten. Wenn eine gerade Linie auf einer andern also aufstehet, daß sie sich auf keine Seite mehr als auf die andere neiget, so stehet sie perpendicular, oder senkrecht; und ein Winkel, der durch zwei auf einander perpendicular stehende Linien gemacht wird, heisset ein rechter Winkel. (angulus rectus). Diejenige Winkel, die grösser sind als ein rechter, heissen stumpfe (obtus), welche aber kleiner sind, heissen spitzige Winkel. (anguli acuti.) Nun kann ich auf einer jeden geraden Linie einen halben Cirkel beschreiben, wenn ich einen Punkt nach Belieben annehme, und die eine Spitze des Zirkels auf den Punkt setze, mit der andern aber nach beliebiger Eröffnung die Cirkellinie beschreibe. Da ich aber auch aus jedem Punkt einer gegebenen Linie, andere gerade Linien ziehen kann, wodurch Winkel bestimmt werden: so müssen alle auf einer Linie aus einem Punkt gezogene Winkel zusammen einem halben Cirkel, das ist $\frac{360}{2} = 180^\circ$ gleich seyn: und weil sich auf einer jeden Linie

Linie eine Perpendicularlinie gedenken läßt, die Perpendicularlinie aber auf beiden Seiten rechte Winkel macht, so müssen auch zween rechte Winkel 180° gleich seyn; folglich wird ein rechter Winkel, die Hälfte von zween, auch der Hälfte von 180° das ist 90 Graden, oder dem vierten Theil des Circels, gleich seyn. Diese Sätze lassen sich nun auch aus den Figuren beweisen. Man heist diejenige Winkel, welche auf einer Linie aufstehen, und aus einem Punkt gezogen werden, Nebenwinkel (anguli contigui, vel. deinceps positi). Demnach sind die Winkel ACD und DCB, oder m und n Nebenwinkel. Das Maas des Winkels m ist der Bogen AD, und das Maas des Winkels n der Bogen BD. §. 140. Folglich ist

$$m = AD$$

$$n = BD$$

$$m + n = AD + BD$$

$$180^\circ = AD + BD.$$

$$m + n = 180^\circ.$$

Wenn also der eine Winkel z. E. m gegeben, und 120° gleich wäre, so würde der andere leicht sich finden lassen; er wäre nemlich $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

$$\text{Dann } m + n = 180^\circ$$

$$\text{nun seye } m = 120^\circ$$

$$\text{folglich } n = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

3 4

Wenn

ne Winkel 180° zusammen ausmachen, oder zweyen rechten Winkeln gleich seyn; und wie ein rechter Winkel allemal 90° halthe;

Was Nebenwinkel seyn,

Tab. I
fig. 5.

und wie alle Nebenwinkel zusammen 180° halten,

und wie man aus einem gegebenen Nebenwinkel den andern finden könne.

Alle Winkel
um einen
Punkt herum
halten 360°
zusammen.

Wenn ferner der eine ein rechter Winkel ist, so muß es auch der andere seyn; dann wenn $m = 90$, so ist $n = 180 - 90 = 90$. Weil ich endlich um einen jeden Punkt einen Cirkel herumschreiben kann, so werden auch alle um einen Punkt herum beschriebene Winkel einem Cirkel, folglich auch seinem Maas, das ist 360° gleich seyn.

Was Vertic-
alwinkel
sind?

§. 142. Die Verticalwinkel machen wieder eine andere Verhältniß der Winkel aus. Sie entstehen, wenn zween Winkel an ihren Spitzen zusammen stoßen, und die verlängerte Schenkel einander durchkreuzen. So stellet ein lateinisch X Verticalwinkel vor. Nun ist dieses die Eigenschaft der Verticalwinkel, daß sie alle einander gleich seyen. Folglich $o = x$; dann

$$o + n = 180^\circ \quad \text{§. 141.}$$

$$x + n = 180^\circ$$

$$o + n = x + n \quad \text{§. 9.}$$

$$n = n$$

$$o = x.$$

Alle Vertic-
alwinkel
sind einander
gleich;

Fruchtbar-
keit der be-
ten erwiese-
nen Lehrsätze.

Diese zween Lehrsätze von den Nebenswinkeln sowohl als von den Verticalwinkeln muß man sich wohl bekannt machen; dann sie kommen im folgenden ungemein oft wiederum vor. Ehe wir aber weitere Verhältnisse der Winkel unsern Lesern vortragen, müssen wir einen Begriff

griff aus der Metaphysik entlehnen, und zeigen, was eine Figur ist. Wenn ein Continuum durch ein anderes Continuum seine bestimmte Grenzen allenthalben bekommt, so sagt man, es seye eine Figur. Ein Winkel ist also keine Figur im eigentlichen Verstande; es sey dann, daß die Oeffnung durch eine Linie vollends geschlossen werde. Folglich wird die allereinfachste geradlinichte Figur ein Dreyeck seyn: denn geradlinichte Zweyecke lassen sich nicht denken. Entweder divergiren die Linien, und stoßen nur in einem Punkt zusammen, oder sie fallen in allen Punkten zusammen. Ist jenes, so giebt es Winkel; ist dieses, so bekommt man die vorige gerade Linie wieder, ohne eine Figur. Folglich ist das Dreyeck die erste geometrische Figur, die aus geraden Linien entstehen kann.

Was eine Figur seye.

Warum ein Winkel keine Figur seye,

und wie deswegen die allereinfachste und erste geradlinichte Figur ein Dreyeck seye; daher ein geradlinichtiges Zweyeck ein Unending ist.

§. 143. Ein Dreyeck bestehet aus drey Seiten und drey Winkeln; man kann es also nach den Seiten und Winkeln betrachten. Was die Seiten betrifft, so können entweder alle drey Seiten einander gleich seyn, da es dann ein gleichseitiges Dreyeck giebt (*Triangulum æquilaterum*,) oder es können nur zwei Seiten einander gleich seyn; in welchem Fall ein gleichschenklichtes Dreyeck heraus kommt (*triang. æquicrurum vel isosceles*); oder es kann auch seyn, daß gar keine Seite der andern gleich ist,

Wie vielerley Gattungen von geradlinigten Dreyecken es gebe;

In Rücksicht auf die Seiten bemerkt man das gleichseitige,

das gleichschenklichte,

das ungleich-
seitige;

in Rücksicht
aber auf die
Winkel,
das recht-
winkliche,

das stumpf-
winkliche,

und das spitz-
winkliche
Dreysck.

Aus drey
Seiten wird
ein Dreysck
bestimmt,
wenn je zwey
und zwey Sei-
ten zusammen
allemal grö-
ßer sind als
die dritte.

Tab. I.
fig. 2.

Tab. I.
fig. 8.

Aus zwey Sei-
ten und ei-

folglich das Dreysck ungleichseitig wird (triangulum scalenum.) In Absicht auf die Winkel giebt es wiederum drey Fälle. Dann wann in einem Dreysck ein rechter Winkel ist, so hat man ein rechtwinkliches Dreysck, (Triang. rectangulum;) ist ein stumpfer darinnen befindlich, so ist das Dreysck stumpfwinklich, (obtusangulum.) Sind aber alle drey Winkel spitzig, so ist das Dreysck spitzwinklich. (acutangulum.) Warum wir nicht mehr als einen rechten, und einen stumpfen, hingegen drey spitzige Winkel sagen dürfen, solle an seinem Ort erwiesen werden. Man siehet also hieraus schon, daß man aus drey gegebenen Seiten ein Dreysck machen kann; nur müssen die Seiten so beschaffen seyn, daß allemal zwey zusammen genommen, größer seyen als die dritte. So kann man aus den drey Linien AE, AC, und AB ein Dreysck machen, weil $AE + AC > AB$, und $AB + AC > AE$ u. s. w. Wenn aber $AE + AC < AB$, so wäre das Dreysck nicht möglich, und die zwey Linien AE und AC würden sich nicht außerhalb der Linie AB schließen oder zusammen gehen können, weil sie zu kurz sind, folglich in die Linie AB hineinfallen müßten. Eben so kann man aus zwey Linien und dem Winkel, den sie einschließen, das Dreysck ABC machen: dann die Seiten AB und AC und

der

der Winkel BAC sind gegeben; folglich ist ^{nem Winkel,}
keine andere Linie, durch welche das Dreys ^{den sie eins}
eck beschloffen und vollendet würde, mög- ^{schließen,}
lich, als die Linie BC. Endlich kann man ^{wird ein}
auch ein Dreyeck aus einer Linie und den ^{Dreyeck be-}
zween daran liegenden Winkeln, deren ^{stimmt;}
Maas zusammen aber kleiner als 180° ^{Tab. I.}
ist, bestimmen. Denn weil die Seite ^{fig. 7.}
AB, und die Winkel DAB und CBA ^{Aus einer}
gegeben sind, so können sich die verlän- ^{Seite und}
gerte Linien AD und BC nirgend anders ^{zween daran}
als in E begegnen und schliessen; wie man ^{liegenden}
aus der Figur leicht erfiehet. Warum ^{Winkeln}
man aus drey gegebenen Winkeln, wenn ^{wird ein}
sie auch alle so beschaffen sind, daß sie im ^{Dreyeck be-}
Dreyeck Platz finden, doch noch kein be- ^{stimmt.}
stimmtes Dreyeck machen könne, folglich ^{Warum man}
die Aufgabe selbst unbestimmt sey, wol- ^{nicht auch}
len wir an seinem Ort zeigen. Man muß ^{sey, aus drey}
also, ein Dreyeck zu bestimmen, drey ^{Winkeln}
Stücke, und unter diesen drey Stücken allemal ^{wird ein}
eine Linie haben. ^{Dreyeck be-}
^{stimmt?}

§. 144. Aus dem bisherigen ergeben ^{Die hieraus}
sich drey wichtige und durch die ganze Ma- ^{fließende}
thematik sich nutzbar beweisende Grundsä- ^{wichtige}
ze: der erste heißt: ^{Grundsätze}
^{von der Con-}
^{gruenz der}

I. Wenn in zweyen Dreyecken alle drey ^{Dreyecke,}
Seiten einander gleich sind, so sind die ^{werden er-}
ganze Dreyecke gleich und ähnlich, das ^{klärt:}
ist congruent: denn durch drey Seiten, ^{I. Grundsatz,}
welche so beschaffen seyn müssen, wie wir ^{wenn in zwey}
§. 143. gezeigt haben, läßt sich nur ein ^{Dreyecken}
ein- ^{alle drey}
^{Seiten ein-}

ander gleich
sind.

einiges Dreyeck bestimmen. Man versuche es, und lasse sich von Holz oder Eisen drey Linien oder Seiten machen; man mag sie zusammen legen wie man will, so wird man eben immer einerley Dreyeck herausbringen.

II. Grundsatz,
wenn zwei
Seiten und
der eingeschlossene
Winkel beider
in zwey
Dreyecken ein-
ander gleich
sind,
Tab. II.
fig. 8.

II. Wenn in zwey Dreyecken zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel einander gleich sind, so sind die ganze Dreyecke vollkommen gleich und ähnlich, das ist congruent. Denn es ist unmöglich, daß eine grössere oder kleinere Linie als die Linie BC den Winkel BAC beschliessen könnte, wenn der Winkel selbst und die Linien AB und AC unverändert bleiben. Man darf sich nur hölzerne oder eiserne Linien und Winkel machen lassen, so wird man abermal durch einen Versuch von der Wahrheit unsers Satzes überzeugt werden.

III. Grundsatz,
wenn in zwey
Dreyecken eine
Seite u.
die zwey dar-
an liegende
Winkel ein-
ander gleich
sind.
Tab. II.
fig. 7.

III. Wann in zweyen Dreyecken eine Seite und die zweyen an der Seite liegende Winkel einander gleich sind, so sind die ganze Dreyecke gleich und ähnlich, das ist congruent. Die Ursache ist leicht begreiflich. Wenn die Winkel DAB und CBA nebst der Linie AB unverändert bleiben, so ist es schlechterdings unmöglich, daß sich die verlängerte Linien AD und BC an einem andern Ort als in E vereinigen und schliessen. Man kann auch d'falls den Versuch mit hölzernen oder eisernen

eisernen Linien machen ; wenn man eine augenscheinliche Probe für die Einbildungskraft haben will.

Das sind nun die drey wichtige Grundsätze , welche in der Geometrie billig die erste Stelle verdienen. Man druckt sie auch , wie wir im vorhergehenden §. gezeigt haben , mit kürzern Worten folgender massen aus : Ein Dreieck wird durch drey Seiten , oder durch zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel , oder endlich durch eine Seite und zween dabey liegende Winkel vollkommen bestimmt , also , daß es nicht möglich ist , zwey verschiedene Dreiecke aus diesen gegebenen Stücken zu machen. Wenn also eines gefunden wird , das eben diese Eigenschaften hätte , so ist es mit dem andern congruent , und man darf in Absicht auf die Gleichheit und Aehnlichkeit eines für das andere setzen und substituiren. Wie ferne man bey rechtwinklichten , und in der Trigonometrie , bey allen Dreiecken überhaupt sagen könne : ein Dreieck werde durch zwey Seiten und einen Winkel , er mag stehen wo er will , bestimmt ; solle an seinem Ort vorgetragen werden. Inzwischen behält man nur die bereits erwiesene drey Grundsätze , durch welche man nun leicht verschiedene geometrische höchstwichtige Lehrsätze demonstrieren kann. Die leichtesten Folgen , welche aber nicht

Kürzerer

Ausdruck der

angeführten

Grundsätze.

Warum man nicht hier überhaupt sage , drey Seiten , oder zwey Seiten und ein Winkel , oder eine Seite und zween Winkel bestimmen ein Dreieck.

eins

einmal in der ausübenden Mathematik mehr genutzt werden, übergehen wir ganz. 3. E. die Weite zweyer Derter, zu deren beiden, oder einem, oder gar keinem man kommen kann, auszumessen. Man besieht nemlich in diesem Fall, durch allershand angenommene Stände lauter congruente Dreyecke zu machen, da dann allemal die der gesuchten Weite correspondirende Seite die Weite selbst anzeigen wird. Allein diese Aufgaben lassen sich alle kürzer, zuverlässiger und vollständiger in der Trigonometrie auflösen, wohin wir auch unsere Leser im folgenden, wann von den sogenannten Meßtrischlein die Rede seyn sollte, verweisen werden. Daß endlich nach den gegebenen Grundsätzen ein gleichseitiges Dreyeck, wenn nur eine eingezeichnete gegeben ist, und ein gleichschenklisches, wenn zwei Linien, nemlich eine Seite oder ein Schenkel und die Grundlinie gegeben sind, wirklich bestimmt werde, ist ohne unser Erinnern klar und deutlich; daher wir auch dißfalls unsern Lesern mit solchen leichten Aufgaben nicht beschwerlich fallen wollen.

Warum wir die hieraus folgende praktische Aufgaben, die Weite der Derter zu messen, u. s. f. übergehen,

und warum man auch im folgenden nichts von dem sogenannten Meßtrischlein gedenken werde.

Von Bestimmung und Aufrichtung der Perpendicularen.

§. 145. Es giebt aber noch einige andere Folgen, welche aus diesen Grundsätzen demonstrirt werden, und noch besonders anzumerken sind. Die erste ist die Kunst, eine Perpendicularlinie aufzurichten. Das kann nun auf eine zweifache Weise

Ausmessung der Körper. 3

Weise geschehen: denn es kann einem auf einer Linie ein Punkt angewiesen werden, auf welchem der Perpendikel stehen soll; man kann einem aber auch einen Punkt ausser der Linie bestimmen, von welchem man den Perpendikel auf die Linie herabziehen muß. Vom ersten Fall res. Tab. I. den wir zuerst: man solle auf die Linie AB fig. 9. aus dem Punkt C einen Perpendikel CD aufrichten. Diß geschieht leicht, wenn man nur aus C mit beliebiger Eröffnung des Zirkels auf der Linie AB zu beiden Seiten des Punkts C, die von dem Punkt C gleich weit abstehende Durchschnitte in A und B, hernach abermal von B aus in D und von A aus wieder in D den Durchschnitt D mit dem nach Belieben eröffneten Zirkel macht, aber so, daß die Oeffnung, wenn sie einmal angenommen ist, nicht geändert, folglich die Linien AD und BD gleich lang gezogen werden können. Hat man diß gethan, so ziehet man die gerade Linie DC, welche durch die zwei Punkte D und C bestimmt wird, und eine wirkliche Perpendicularlinie ist. Denn wenn die Winkel p und o zween rechte Winkel sind, so ist sie gewiß perpendicular. Das erste wollen wir nun erweisen:

Erster Fall, wenn in der Linie ein Punkt gegeben, aus welchem der Perpendikel aufgerichtet wird.

§ 8 Geom. I Cap. Von der dreyfachen

$AC=CB$; dann man hat beide Linien gleich gemacht; eben so ist auch $AD=BD$.

$CD=CD$ und endlich die dritte Linie sich selbst gleich:

$\triangle ADC \equiv \triangle BDC$. folglich kraft des ersten Grundsatzes, nr. I.

Sind aber die ganze Triangel congruent oder gleich und ähnlich, so sind auch die Winkel, die gleichen Seiten entgegen stehen, einander gleich: denn wenn der eine grösser oder kleiner wäre, als der andere, so würden die Figuren selbst einander nicht decken, oder congruiren. Nun steht der Seite AD der Winkel n , und der Seite BD der Winkel o entgegen. Folglich müssen die Winkel selbst, weil die Seiten gleich sind, auch einander gleich seyn: also ist $o = n$; ist aber dieses, so sind beide Winkel rechte Winkel §. 141. Denn $o + n = 180^\circ$ §. 141.

$$o = n$$

$$o + o = 180 \text{ das ist,}$$

$$2o = 180^\circ$$

$$\text{-----} : 2$$

$$o = \frac{180}{2} = 90^\circ.$$

Wo aber ein rechter Winkel ist, da steht allemal eine Linie auf der andern perpendicular; wir haben also bewiesen, was wir beweisen sollten. Uebrigens merken wir noch an, daß man wohl thut, wenn man

man sich Mühe giebt, die Redensart, ein Winkel steht einer Seite, oder eine Seite steht einem Winkel gegen über, genau zu verstehen und sich bekannt zu machen; sie kommt nicht nur hier, sondern auch bey der Aehnlichkeit der Dreyecke mehrmalen vor. Am leichtesten wird man die Sache behalten, wenn man sagt: diejenige Seite, welche den Winkel beschließt, steht im Dreyeck dem Winkel gegen über. So beschließt die Linie AD den Winkel o, folglich steht sie ihm gegen über; eben so steht die Linie BD dem Winkel n gegen über, weil sie ihn beschließt, und die Oeffnung gleichsam zumacht. Der andere Fall von Perpendicularlinien ist, wenn einem der Punkt ausser der Linie gegeben wird. Z. E. man solle von dem Punkt D einen Perpendikel auf AB herab fallen. Hier macht man nun Durchschnitte von D aus in A und B, daß DA und DB gleich werden; ferner werden aus A und B abermal Durchschnitte entweder niederwärts in F, oder oberhalb in E gemacht; da dann durch die zwey Punkte D und E, oder D und F die Linie DC bestimmt, und zugleich eine Perpendicularlinie wird. Denn

Die Redensart, eine Seite steht einem Winkel, und ein Winkel steht einer Seite gegen über, wird erklärt, und ist besonders zu merken.

Tab. I.
Fig. 11.

Tab. I.
Fig. 10.

Zweyter Fall von Errichtung der Perpendicularlinien, wenn der Punkt ausser der Linie in einer gewissen Entfernung gegeben wird.

$$AD = DB$$

$$AF = FB$$

$$DF = DF$$

$$\Delta DAF = \Delta DBF \quad \text{folglich}$$

$0 = x$ dann sie sind gleichen
Seiten AF und FB
entgegen gesetzt;

nun ist ferner $AD = DB$

$$DC = DC$$

$0 = x$ folglich nach dem
zweiten Grundsatz
§. 144. nr. II.

$\Delta ADC = \Delta BDC$; dahero auch
 $n = m$, weil sie gleichen
Seiten AD u. DB
entgegen stehen;

$$n + m = 180^\circ$$

$$n = m$$

$$2n = 180^\circ$$

$$\text{-----} : 2$$

$n = 90^\circ$ also ein rechter Winkel.

Eben so wird der Beweis geführt, wenn
man an dem Durchschnitt in E betrachtet;
dann $AD = DB$

$$AE = EB$$

$$DE = DE$$

$$\Delta ADE = \Delta BDE \quad \text{folglich}$$

$$0 = x$$

ferner $AD = DB$

$$DC = DC$$

$0 = x$ folglich

$$\Delta ADC = \Delta BDC$$

$m = n$, u. s. w.

Die

Die zweite Folge aus unsern Grundsätzen. Noch andere ist die Kunst, eine Linie und einen Winkel in zween gleiche Theile zu theilen: dann auch bey der bereits erklärten Figur darf man nur Durchschnitte in D und F machen, und die Linie DF ziehen, so wird in C die Linie AB in zween gleiche Theile getheilet seyn. Wir haben ja umständlich bewiesen, daß unter der vorgetragenen Bedingung das Dreyeck ADC dem Dreyeck DCB gleich und congruent werde. Es ist also

$$\triangle ADC = \triangle BDC$$

$$o = x$$

$$AC = CB.$$

folglich auch die gleichen Winkel in Winkeln entgegen stehende Seiten,

wie auch einen jeden Winkel in zween gleiche Theile zu theilen.

Der Winkel wird getheilt, wenn man CA gleich macht CB, und hernach Durchschnitte aus B und A in D macht; da dann die Linie CD den Winkel ACB in zween gleiche Winkel o und n theilet: dann

$$CA = CB$$

$$AD = BD$$

$$CD = CD$$

$$\triangle ACD = \triangle BCD \text{ folglich}$$

$o = n$, dann sie stehen gleichen Seiten AD u. BD entgegen.

Die dritte Folge besteht endlich darinnen, daß die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyeckes einander gleich seyen. Man theile die Grundlinie AB in zween

372 Geom. I Cap. Von der dreyfachen

und endlich,
daß die beide
Winkel an
der Grundli-
nie eines
gleichschen-
lichten Drey-
ecks gleich
seyn.

zween gleiche Theile, in D, und ziehe die Li-
nie ED; so ist

$$AD = DB$$

$$DE = DE$$

$$AE = EB,$$

—————

$$\triangle AED = \triangle BED;$$

$$o = n.$$

weil das Dreyeck gleich-
schenkligh ist; folglich
und daher die einerley
Seiten entgegen stehende
Winkel einander gleich.

Eben so könnte man umgekehrt beweisen:
wenn die Winkel in der Grundlinie gleich
sind, so seyn die Dreyecke gleichschen-
licht. Das sind nun die vornehmste Fol-
gen aus den obigen Grundsätzen, unter
welchen man vornehmlich die dritte und
letzte behalten und sich bekannt machen
kann.

Wir setzen noch folgenden Lehrsat-
z bey, der ebenfalls wohl zu merken ist. In
einem jeden geradelinichten Dreyeck sind
allemal zween Winkel zusammen kleiner
als 180° oder als zween rechte Winkel.
Man betrachte das Dreyeck ABC, und
theile die Seite AC in zween gleiche Theile
in E; man ziehe die Linie BE, und ver-
längere sie nach F, bis $EF = BE$. Man
ziehe die Punkten F und C zusammen, so
bekommt man das Dreyeck $EFC = \triangle ABE$,
weil nach der Construction $AE = EC$,
 $EB = EF$, und die Verticalwinkel bey E
einander gleich sind. Man bezeichne die
Winkel s, o, n, m, so ist der Beweis des
Lehrsatzes leicht zu finden. Denn weil
 $\triangle ABE = \triangle EFC$: so ist

$$s = n$$

Tab. I.
Fig. 13.
ß.

$$s = n \text{ aber}$$

$$n < n + m \quad \text{also auch}$$

$$\underline{s < n + m}$$

$$0 = 0$$

$$s + 0 < 0 + n + m$$

$$0 + n + m = 780^\circ$$

$$\underline{s + 0 < 180^\circ.}$$

§. 146. Jetzt aber kommen wir auf das Paral:
einen höchst wichtigen Lehrsatz von den so lellinien
genannten Parallellinien, in so ferne sie seyen;
durch eine dritte Linie durchschnitten wer-
den. Wir müssen nur vorhero erklären,
was Parallellinien seyen. Zwei Linien,
welche auf einer dritten perpendicular auf-
stehen, sind einander parallel; folglich
wird sich nach der Natur der Perpendi-
cularlinien keine zur andern neigen, noch
auch von ihr sich entfernen. Dahero hat
Euclides diejenige Linien parallel ge-
nannt, welche weder convergiren noch di-
vergiren; und Herr Baron von Wolf
solche Linien, welche immer einerley Wei-
te oder Distanz von einander behalten.
Denn die Weite oder die Distanz zweyer-
Parallellinien ist, wie man leicht begreift,
allemal eine Perpendicularlinie, oder ei-
ne Linie, mit welcher die Parallellinien
beiderseits rechte Winkel machen. So
sind die Linien HD und IK parallel. Wenn
nun diese zwei Linien durch eine dritte Li-
nie DE durchschnitten werden, so sind die

und wie ihre
Distanz durch
Perpendicu-
larlinien be-
stimmt wer-
de.

Tab. I.

Fig. 12.

Was Wech-
selwinkel
seyn;

Alle Wech-
selwinkel, (angu-
li alterni) sind
einander
gleich.

Beweis die-
ses wichtigen
Lehrsatzes.

Wechselwinkel (anguli alterni) x und y einander gleich. Diesen wichtigen Lehr-
satz wollen wir jezo beweisen. Man zie-
he zwischen zwei gegebenen Parallellinien
HD und AK die Perpendicularlinie AB,
welche die Distanz beeder Linien ausdrückt,
folglich auf einer wie auf der andern per-
pendicular stehen muß. §. 144. Man theile
diese Linie in zween gleiche Theile in C;
nach §. 145. hernach ziehe man durch den
Theilungspunkt C die schiefe Linie ED,
wie man will, wenn nur die Parallelli-
nien dadurch beederseits durchschnitten wer-
den; durch diese Operation werden zwey
Dreiecke ECB und ACD erzeugt. Wenn
sie nun beede congruent, das ist gleich und
ähnlich sind, so werden die Winkel x und
 y einander gleich seyn. Das wollen wir
jezo beweisen.

I. Wir sagen erstlich :

$r = s$ denn AB ist die Distanz
der Parallellinien ;

$n = o$ §. 142.

$AC = CB$. denn wir haben sie gleich
gemacht ; folglich

$\triangle ACD = \triangle BCE$. Darum sind auch die
gleichen Seiten entgegen-
stehende Winkel einan-
 $AC = CB$. der gleich, das ist, weil
 x der Linie AC, und y der
Linie CB entgegen steht.

$x = y$.

Das

Das ist das erste, das wir beweisen woll; Zwo gleich
ten; es fließen aber noch mehr Folgen wichtige Fol-
aus dieser Lehre. gen, die aus

II. Dann weil

$$x = y \quad \text{nr. I.}$$

und $x = u$ §. 142. so ist auch §. 9.

$$u = y.$$

dem erwiesenen Lehrsat-
sich herleiten
lassen.

III. Endlich weil

$$u = y \quad \text{nr. II.}$$

und $m = m$ so ist auch

$$\begin{aligned} u + m &= y + m; & \text{da aber} \\ u + m &= 180^\circ, & \text{so ist §. 9.} \\ y + m &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Also sind nach dem gegebenen Beweis

I. die Wechselwinkel x und y einander
gleich;

II. der Verticalwinkel von x , nem-
lich der Winkel u , ist gleichfalls dem un-
tern Winkel y gleich;

III. die Summe der zween innern
Winkel $m + y$ ist jedesmal 180° .

Wie nun diese Eigenschaften aus dem an- Wie man auch
genommenen Satz, daß die Linien HD und umgekehrt be-
 IK parallel seyen, unumstößlich bewiesen weisen könne,
worden sind, so kann man auch wieder daß wo die
ohne Mühe umgekehrt beweisen, daß zwo Wechselwink-
Linien parallel seyen, wenn die Wechsels- tel gleich sind,
winkel x und y einander gleich seyen. u. s. w. die Linien als
Dieser Lehrsatz ist einer der fruchtbarsten lemal paral-
in der Geometrie; man thut daher wohl, lel seyen.

wenn man sich selbigen vorzüglich bekannt macht. Seine Fruchtbarkeit werden wir sogleich im folgenden zeigen. In meinem mathematischen Lehrbuch habe ich den Euclidischen Beweis mit den Kästnerischen Erläuterungen vorgetragen; wo man denselben nachschlagen kann. Der hier gegebene aber ist für Anfänger etwas leichter.

§. 147. Ein jedes Dreyeck hat drey Winkel; die Summe dieser Winkel wird sich also ausmessen lassen. Daran zweifelt man nicht. Das aber könnte man dabei noch fragen: ob alle Winkel im Dreyecke zusammen genommen, eine gleiche Anzahl von Graden haben, oder nicht; die Dreyecke selbst mögen hernach gleichseitig, gleichschenkligh, ungleichseitig, recht-, stumpf- oder spitzwinklicht seyn? Und wenn das erste wäre, so könnte man wieder fragen: ob sich die Anzahl der Grade der Winkel für alle nur denkbare geradelinichte Dreyecke nicht auch bestimmen lasse? Wir wollen es versuchen, ob wir eine bestimmte Antwort hierauf geben können. Man nehme ein Dreyeck, was man für eines will, und mache eine Seite davon zur Grundlinie, worauf es stehen solle. Z. E. das Dreyeck ACB, dessen Grundlinie (basis) AB ist; mit dieser Grundlinie ziehe man durch den obern Spitz C die Linie DE parallel, und bezeichne hernach alle theils schon vorhandene, theils durch die

Paral.

Von den drey
Winkeln im
Dreyeck; und

ob die Anzahl
der Grade in
allen drey
Winkeln zus-
ammen ge-
nommen bey
allen Drey-
ecken gleich
groß und un-
terschieden
seye;

Tab. I.
fig. 13.

Die drey
Winkel eines
geradelinich-
ten Dreyecks
zusammen ge-
nommen sind

Parallellinie neuentstandene Winkel mit allemal 180° den kleinern Buchstaben des Alphabets, ^{oder zween rechten Winkeln} z. E. m, n, o, r, s. Ist dieses geschehen, ^{seyn gleich.} so wird man folgende Gleichungen finden:

$$r = m \text{ §. 146. nr. I.}$$

$$o = o \text{ §. 9.}$$

$$s = n \text{ §. 146. nr. I. folglich §. 9. ses Lehrsatzes.}$$

$$r + o + s = m + o + n. \text{ Ferner ist}$$

$$r + o + s = 180^\circ \text{ §. 141. Demnach §. 9.}$$

$$m + o + n = 180^\circ. \text{ Da nun } m + o + n$$

die drey Winkel in dem vorgegebenen Dreyecke sind, so macht ihre Summe

zusammen 180° Grade; und weil der Beweis bey allen geradelinichten Dreyecken

angehet, so wird die Summe aller Winkel in einem solchen Dreyeck, es mag be-

schaffen seyn wie es will, wenn es nur geradelinicht ist, allemal 180° machen.

Wir reden nur von geradelinichten Dreyecken, denn es giebt auch krummlinichte;

und von diesen werden wir zu seiner Zeit hören, daß sie ungleich mehr Grade in ih-

ren Winkeln haben können. Uebrigens erhellet hieraus, daß kein geradelinichtes

Dreyeck mehr als einen rechten Winkel habe: denn zween rechte Winkel machen schon

180° ; folglich würde für den dritten Winkel nichts mehr übrig bleiben. Noch viel-

weniger kann ein Dreyeck mehr als einen stumpfen Winkel haben; sonst würde die

Anzahl nur von 2 Winkeln schon grösser als

Warum der Beweis nur auf geradelinichte Dreyecke sich anwenden laßt.

als 180° seyn. Hingegen drey spitzige sind in einem Dreyeck möglich; und wenn sie alle einander gleich sind, so ist ein jeder $\frac{180}{3} = 60^\circ$. Folglich hält der Winkel in dem gleichseitigen Dreyeck 60° ; weil sie alle drey gleich sind, das ist, weil die Winkel, die gleichen Seiten entgegen stehen, einander gleich sind. Man kann dieses leicht auch aus S. 145 eben so beweisen, wie man die Gleichheit der Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyecks bewiesen hat. Aus dem gegebenen Beweis für die geradelinichte Dreyecke fließt noch eine wichtige Folge. Man verlängere die Seiten eines Dreyecks z. E. im Dreyeck ACB die Seite AC bis in D, so wird ein neuer Winkel DCB oder mit dem kürzern Ausdruck der Winkel p erzeugt werden. Und dieser Winkel p, welcher der äußere Winkel heißt, (angulus externus) wird den beeden entgegengesetzten innern Winkeln, (angulis oppositis internis) gleich seyn. Der Beweis ist leicht, und heißt also:

Tab. I.
Fig. 14.

Der äußere Winkel in einem Dreyeck ist den entgegengesetzten beeden innern Winkeln gleich.

Nach dem ersten

$$o + m + n = 180^\circ \quad \text{Beweis.}$$

Beweis.

$$o + p = 180 \quad \text{S. 141. folglich}$$

$$o + m + n = o + p. \quad \text{Da nun}$$

$$o = o$$

so wird, wenn man beiderseits subtrahirt,

$$m + n = p.$$

Das

Das heißt, der äussere Winkel p ist allemal den beiden innern entgegen gesetzten Winkeln eines Dreiecks gleich.

§. 148. Waren die bisherige Lehr- Die Betrachtung der
sätze von den Dreiecken so fruchtbar als wichtig; so wird man im folgenden nicht Winkel nach
weniger solche Sätze lesen, deren Nutzbarkeit sich in der ganzen Mathematik ausbreitet. ihren vers-
Die Lehre von den Winkeln ist schiedenen
noch nicht erschöpft. Wir haben S. 140. Lagen wird
gezeigt, daß man einen Winkel durch einen fortgesetzt.
Kreisbogen, dessen Mittelpunkt die Spitze, und dessen Radii die beide Schenkel des Winkels sind, messen könne. Wie wäre es nun, wenn man den Bogen vollendete, und um den Winkel herum einen Kreis beschriebe, und hernach andere Winkel in den Kreis unter der Bedingung hineinsetzte, daß ihre Spitze an die Peripherie hinreichte, die Schenkel aber auf eben dem vorigen Kreisbogen, welcher das Maas des ersten Winkels war, aufstünden? Wir wollen einen Versuch machen. Man siehet von selbst, daß es verschiedene Fälle gebe. Der erste und leichteste wird
Tab. I.
Fig. 16.
in der sechszehenden geometrischen Figur vorgestellt. Man hat um den Winkel BCA aus dem Punkt C den Kreis $BADB$ beschrieben; folglich ist der Bogen BA das Maas des Winkels BCA , oder nach einem kürzern Ausdruck des Winkels o . Die Peripherie, Linie AC wurde bis an die Peripherie in
D
Was die Winkel am Mittelpunkt, (anguli ad centrum) und die Winkel an der Peripherie,

(anguli ad
peripheriam)
sehen.

Der Winkel
am Mittel-
punkt ist noch
einmal so
groß als der
Winkel an
der Periphe-
rie, oder der
Winkel an
der Periphe-
rie ist die
Hälfte des
auf gleichem
Bogen ste-
henden Wink-
els am Mit-
telpunkt; die-
ser Lehrsatz
wird auf drey
Fälle ange-
wandt und
erwiesen.
Erster Fall,

D verlängert; und sodann von D bis B die Linie DB gezogen; da sich dann ein neuer Winkel BDA ergab, welcher auf dem vorigen Bogen aufstehet, und dessen Spitze sich gerade in der Peripherie endiget. Man heißt ihn deswegen einen Winkel an der Peripherie (angulus ad peripheriam), wie der erstere ein Winkel am Mittelpunkte (angulus ad centrum) genannt wird. Nun hat man gefunden, daß der Winkel am Mittelpunkte gerade noch einmal so groß seye, als der Winkel an der Peripherie, der auf eben demselbigen Bogen steht. Wir wollen sehen, ob wir diesen Satz auch aus den vorgezeichneten Figuren erfinden können. Der kurz ausgedruckte Satz wird demnach der folgende seyn: $o = 2x$

Nun müssen wir den Beweis davon geben:

$o = x + y$ §. 147. denn o kann als der äußere Winkel angesehen werden.

$x = y$ §. 145. denn der $\triangle CDB$ ist gleichschenkligh, weil DC und CB Radii sind. Wenn

man nun gleiches für gleiches setzt, so ist

$o = x + x = 2x$; welches zu erweisen war. Und das ist nun der

I. Fall, da $o = 2x$.

Man

Zweiter Fall,
Tab. I.
Fig. 17.

Man kann aber auch den Winkel an der Peripherie also zeichnen, wie er in der 17 Fig. aussiehet; da dann abermal gefragt wird, ob der Beweis auch auf diese Zeichnung angewendet werden könne? Wir wollen sehen, ob wir die Zeichnung nicht auf den ersten Fall reduciren können, damit der Beweis bekannter und leichter werde. Man ziehe von der Spitze D durch den Mittelpunkt C die Linie DE, so wird man die 16 Figur gleichsam doppelt neben einander gesetzt finden, und alles dahin reduciren können. Denn der Winkel ACB ist in zween Winkel o und n getheilt, deren Summe dem vorigen Winkel gleich seyn muß, weil das Ganze seinen Theilen zusammen genommen gleich ist. Folglich heißt der Winkel ACB nunmehr $o + n$, und der Winkel in der Peripherie, nemlich ADB wird aus gleichem Grunde heißen $y + x$. Wenn nun $o + n = 2y + 2x$, so haben wir die obige Eigenschaft auch von dieser Bezeichnung erwiesen. Der Beweis ist leicht:

$$o = 2y$$

$$n = 2x$$

nach nr. I.

aus gleichem Grunde;
folglich

$$o + n = 2y + 2x. \quad \text{welches der}$$

II. Fall war, den wir nun bewiesen haben.

Ende

Dritter: Fall;

Tab. I.

Fig. 18.

Endlich kann auch die Zeichnung so aussehen, wie sie in der 18 Figur angebracht ist; da man dann abermal fragt, ob auch hier $o = 2s$? Wir versuchen eine nochmalige Reduction auf den ersten Fall, und ziehen aus der Spitze D durch den Mittelpunkt C die Linie DF; durch welche wir zween neue Winkel, nemlich n und r , und zugleich eine der ersten Zeichnung ähnliche Figur bekommen. Nun wird der Beweis sich bald geben: denn der Winkel FCB ist gleich $n + o = 2r + 2s$, wie wir erwiesen haben. Wenn man nun gleiches von gleichem subtrahirt, so bleibt gleiches übrig, nemlich $o = 2s$; oder in wirklichen Gleichungen:

$$n + o = 2r + 2s$$

$$n = 2r,$$

wie nr. I. erwiesen ist;
wird nun dieses subtrahirt,
so ist,

$$o = 2s.$$

welches der

III. Fall war, den wir erweisen sollten.

Wie die Allge-
meinheit des
obigen Lehr-
satzes aus den
drey Fällen be-
kimmmt werde.

Nun kann man keine weitere Zeichnungen ausdenken, welche nicht mit einem von diesen drey angeführten Fällen übereinkämen; demnach wird der allgemeine Lehrsatz seine Richtigkeit haben, daß alle Winkel am Mittelpunkt noch einmal so groß seyen, als die Winkel an der Peripherie, oder daß der Winkel an der Peripherie allemal die Hälfte sey von dem
Win-

Winkel am Mittelpunkt, der mit ihm auf einerley Bogen steht:

§. 149. Aus den erwiesenen Lehrsätzen lassen sich nun wiederum verschiedene wichtige Folgen herleiten. Dann wann man das gesagte kürzlich wiederholt, und die Zeichnung noch einmal betrachtet, so wird man bald die erste Folge verstehen, welche diese ist: Alle Winkel an der Peripherie eines Cirkels sind einander gleich, wenn sie auf gleichen Bögen stehen. So ist der Winkel $ANB = AMB = ADB$, dann ihr gemeinschaftliches Maas ist der halbe Bogen AB , auf dem sie aufstehen; oder ein jeder ist die Hälfte von dem Winkel am Mittelpunkt, den man im Plane bey der Figur hinzudenken kann, und dessen Maas der Bogen AB ist. Darum ist $\frac{1}{2} AB$ das Maas der Winkel ANB , AMB u. s. w. diejenigen Winkel aber, die einerley Maas haben, sind einander gleich. Also sind alle Winkel an der Peripherie, wenn sie auf einerley Bogen stehen, einander gleich.

Einige Folgen werden aus dem erwiesenen Lehrsatz hergeleitet.

Erste Folge: alle Winkel an der Peripherie,

Tab. I.

Fig. 20.

Peripherie, wenn sie auf gleichen Bögen stehen, sind einander gleich.

Fig. 21.

Der Winkel an der Peripherie, der auf einem halben Cirkel aufsteht, oder auf dem Diameter

Die zweyte Folge ist von gleichem ja noch größerem Gewichte. Sie heißt also: Ein Winkel an der Peripherie, der auf einem halben Cirkel, oder auf einem Bogen von 180° aufsteht, hat zu seinem Maas die Hälfte des Bogens, darauf er steht, das ist, 90° ; folglich ist er ein rechter Winkel. Folglich sind alle Winkel, die sich in der Peripherie endigen, und auf dem Diameter

ter beschrie-
ben wird, ist
allemaal ein
rechter Win-
kel und hält,
90 Grade.

dem halben Cirkel oder auf dem Diames-
ter stehen, rechte Winkel. Dieser Lehr-
satz fließet unmittelbar aus dem vorherges-
henden, und breitet seinen Nutzen durch
die ganze Geometrie aus. Die Winkel
AEB, ADB u. s. w. sind also rechte Win-
kel: dann

$$AEB = \frac{ANB}{2} = \frac{180}{2} = 90^\circ$$

$$ADB = \frac{ANB}{2} = \frac{180}{2} = 90^\circ$$

$$AEB = ADB = 90^\circ$$

Die Aufgabe,
man solle auf
den Diameter
eines Cirkels
ein recht-
winkliches
Dreueck, das
sich in der Pe-
ripherie endi-
ge, aufrichten,
ist daher eine
unbestimmte
Aufgabe,
weilen es der-
gleichen un-
endlich viel
giebt, und die-
ses eine Ei-
genschaft des
Cirkels ist.

Wenn man also einem die Frage auflegt:
wie man auf dem Diameter eines Cirkels
ein rechtwinkliches Dreueck aufrichten kön-
ne? so ist die Frage unbestimmt: denn es
lassen sich unendlich viele darinnen beschrei-
ben. Dahero sagt man, der Cirkel seye der
geometrische Ort für die rechte Winkel,
und das ist nun eine besondere Eigenschaft
des Cirkels. Eben so ist ohne unser Erin-
nern klar, daß man mit leichter Mühe
eine Menge von Perpendicularlinien er-
finden könne, wenn man auf dem Diame-
ter des Cirkels solche Dreuecke aufrichtet,
oder die Linien AE und EB, AD und DB
u. s. w. ziehet.

Wie man ei-
ne Menge
Perpendicu-
larlinien
durch diesen
Lehrsatz fin-
den, und an
dem Ende der

Eine neue Folge aus den Lehrsätzen
§. 148. ist endlich die Frage: ob man
nicht auch einen Winkel, dessen Spitze
über die Peripherie hinaus reicht, eini-
ger massen bestimmen und schicklicher aus-
drük-

drucken könne? Man beschreibe den Winkel AFB, dessen Spitze, so weit man will, über die Peripherie des Cirkels hinaus reichen, die Schenkel aber auf dem Bogen AB aufstehen sollen. Man ziehe sodann die Linie AD, so wird man zween neue Winkel o und y bekommen. Folglich wird sich eine Rechnung ergeben, wenn man sagt:

$$o = \frac{AB}{2} \quad \text{§. 148.}$$

$$o = x + y. \quad \text{§. 147.}$$

$$x + y = \frac{AB}{2}$$

$$y = \frac{ED}{2} \quad \text{§. 148. subtrahirt;}$$

$$x = \frac{AB - ED}{2} \quad \text{oder wenn man gleiches für gleiches setzt,}$$

$$x = \frac{o - y}{2}$$

Demnach ist der Winkel AFB, oder kürzer, der Winkel x die halbe Differenz zwischen den Winkeln o und y; das ist, wenn man ED das Maas des Winkels y von AB dem Maas des Winkels o subtrahirt, und den Rest halbirt, so hat man das Maas des Winkels x, welcher über die Peripherie hinaus reicht.

§. 150. Bisher haben wir die Winkel im Cirkel ohne Sehnen betrachtet, nun wollen wir auch sehen, was wir für Eigenschaften finden, wenn wir die Schenkel der

Linien aufrichten könne.
Tab. I.

Fig. 19.
Letzte Folge, ob u. wie man den Winkel, dessen Spitze über die Peripherie hinausreicht, bestimmen könne,

Betrachtung der Winkel im Cirkel in Absicht auf ihre Sehnen.

Tab. I.
fig. 22.

Wenn die
Cirkelbögen
gleich sind, so
sind auch die
Sehnen
gleich,

Winkel nicht nur durch Bögen, sondern auch durch die Sehnen der Bögen beschließen. Es seye der Cirkel ADEB gegeben; sein Mittelpunct seye C; in C wollen wir den Winkel ACB oder n sich endigen lassen, und seine Schenkel AC und CB mit der Sehne AB schließen. Nun wollen wir auf einer andern beliebigen Seite des Cirkels einen gleich grossen Bogen DE abschneiden, und auch seine Sehne ziehen, sodann selbige durch die Radios DC und EC mit dem Mittelpunct verbinden. Nun fragt man: ob die Sehnen gleich seyen, wenn die Bögen gleich sind? Wir sagen ja, und wollen unsere Antwort jeko beweisen.

Der Bogen DE = dem Bogen AB, folglich

$$o = n \quad \text{§. 147. ferner}$$

$$DC = CA$$

$$EC = CB \text{ dann es sind lauter Radii;}$$

————— demnach, §. 144.

$\triangle DCE = \triangle ACB$ und daher auch

$DE = AB$; weil diese zwei Seiten gleichen Winkeln entgegen stehen.

und wenn die
Sehnen
gleich sind, so
sind auch die
Bögen gleich;
folglich auch
die Winkel,

Hieraus erhellet, daß die Sehnen gleicher Bögen einander gleich seyen; und eben so läßt sich beweisen, daß die Bögen gleich seyn müssen, wenn die Sehnen gleich sind. Denn wenn

$$DE = AB$$

$$DC = CA$$

$$EC = CB$$

so ist

$$\triangle DCE = \triangle ACB. \text{ Folglich}$$

$$o = n$$

und daher auch

der Bogen $DE =$ dem Bogen AB .

welche durch
die Bogen ge-
messen wer-
den.

§. 151. Wir halten uns nur noch eine kurze Zeit bey den Sehnen auf, und versuchen jetzt, was heraus kommt, wenn wir eine Sehne ziehen, und selbige durch eine Perpendicular-Linie in zween gleiche Theile zertheilen; wird wol die Perpendicular-Linie, wenn sie verlängert wird, durch den Mittelpunkt des Circels gehen, und folglich den Circel selbst in zween gleiche Theile schneiden? Es sey die Sehne AB , die Perpendicular-Linie, welche die Sehne in G in zween gleiche Theile theilet, DG ; nun verlängere man sie bis in F , und ziehe zu beeden Seiten die Sehnen DA, AE, DB und BE . Wenn $DA = DB$ und $AE = BE$, so sind auch die Bogen DA und DB , ferner die Bogen AE und BE einander gleich; folglich geht die verlängerte Linie DE durch den Mittelpunkt. Das erstere wollen wir beweisen; da sich dann das letztere von selbst geben wird.

Ob die Perpendicular-Linie, welche eine Sehne in zween gleiche Theile theilet, durch den Mittelpunkt des Circels gehe, und den ganzen Circel in 2 gleiche Theile theile, wenn sie verlängert wird?

Tab. II.
fig. 23.

Bejahung
dieser Frage
samt dem
Beweis;

$AG = GB$, weil die Linie in 2 gleiche Theile
 $GD = GD$ getheilt wird.

$\angle AGD = \angle DGB$ sind rechte Winkel; folglich

$$\triangle AGD = \triangle DGB \text{ und daher auch}$$

$AD = BD$, weil sie gleichen Winkeln

entgegen stehen.

Ferner

$$AG = GB$$

$$GE = GE$$

$AGE = BGE$ sind rechte Winkel, folglich

$$\triangle AGE = \triangle BGE; \text{dahero auch}$$

$AE = BE$, weil sie gleichen Seiten entgegen stehen.

Wir haben also bewiesen, daß

$$AD = DB$$

$$AE = BE, \text{ folglich §. 9.}$$

$$AD + AE = DB + BE, \text{ also auch die Bögen}$$

$$DAE = DBE. \quad \text{§. 15. Da nun}$$

$$DAE + DBE = \text{der ganzen Peripherie}$$

$$= 360^\circ,$$

und $DAE = DBE$; so wird, wenn gleiches für
gleiches gesetzt wird,

$$2 DAE = 360^\circ$$

$$: 2$$

$$DAE = 180^\circ \text{ oder dem halben Cirkel.}$$

Eben so ist auch DBE der halbe Cirkel; folglich theilet die Linie DE den ganzen Cirkel in zween gleiche Theile; ist aber dieses, so ist sie der Diameter, und geht durch den Mittelpunkt. Wenn man nun an zween Orten, solche Sehnen, z. E. AB und BE zieht, und sie in zween gleiche Theile durch Perpendicularen theilet, so werden sie beede, nemlich GH und IK, durch den Mittelpunkt gehen, und folglich, weil der Cirkel nur einen einzigen Mittelpunkt hat, an dem Ort, wo sie einander durchschneiden, nemlich in C ihn bestimmen. Man siehet hieraus, daß man aus drey
gege

Tab. II.
fig. 24.

und wie das
durch, wenn
man die Oper-
ation mit
zwo verschie-
denen Seh-
nen mache,
der Mittel-
punkt des
Cirkels be-

gegebenen Punkten, wenn sie anders nicht in einer geraden Linie liegen, einen Cirkel bestimmen kann. Denn die Punkte seyen A, B, und E, nun ziehe man die Linien AB und BE, und theile sie durch Durchschnitte in G und E, wie auch in I und K, welche schon die Perpendicular-Linie J. 145. bestimmen, in zween gleiche Theile; so werden die gezogene Linien GH und IK, den Mittelpunkt C, und die aus dem Mittelpunkt C nach A einem der gegebenen Punkte gezogene Linie CA oder den Radius bestimmen; wenn man aber den Mittelpunkt und den Radius hat, so hat man den ganzen Cirkel, dessen Peripherie hernach durch die drey Punkte A, B und E gehen wird.

stimmt und gefunden werde,

auch wie man aus drey gegebenen Punkten, wenn sie nicht in einer geraden Linie liegen, einen Cirkel bestimmen könne?

§. 152. Doch genug von diesem; wir handeln jezo eine wichtige Materie ab, in Rücksicht auf die Vierecke. Man fragt billig: ob man nicht wie bey den Dreyecken, also auch bey den Vierecken, oder bey solchen Figuren, die in vier gerade Linien eingeschlossen seyen, die Anzahl der Winkel bestimmen könne? Bey dem Dreyeck machen sie 180° ; wie viel machen sie wol zusammen bey dem Viereck aus? Wir werden diese Frage durch die Reduktion beantworten können, wenn wir nur wissen, was Diagonallinien seyen. Wenn in einem Viereck, oder überhaupt in einem Vieleck, von einem Eck zum andern eine

Von den Vierecken;

ob man nicht wie im Dreyeck, also auch im Viereck, die Anzahl aller Winkel bestimmen könne,

und wie man zu dem Ende wissen müsse, was Diagonallinien seyen.

Tab. II
fig. 25.
26.

Die Summe
aller Winkel
im Viereck ist
 360° .

Eintheilung
der Vierecke,
in Quadrate,
Rectangula
Rhombos
und Rhom-
boides, wel-
che mit einem
Namen Pa-
rallelogram-
ma heißen.

Linie gezogen wird, so heißt man sie die Diagonallinie. So sind die beide Linien DB in den beiden Vierecken ABCD die Diagonallinien. Nun sieht man schon, daß ein jedes Viereck durch die Diagonallinien in zwey Dreyecke getheilt werde; da nun die Summe der Winkel in einem Dreyeck 180° macht, so wird sie in zweyen $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$ machen. Folglich ist die Summe aller Winkel in einem geradelinichten Viereck, es mag hernach aussehen wie es will, und regulair oder irregulair seyn, 360° . Nun giebt es regulaire und irregulair Vierecke: ein regulaires Viereck entstehet, wenn entweder alle vier Seiten und Winkel einander gleich sind, da es dann ein Quadrat heißt; oder wenn alle vier Winkel und je zwey und zwey parallele Seiten einander gleich sind, in welchem Fall es ein länglichtes Rectangulum genannt wird; oder wenn zwar alle vier Seiten, aber nur je zweyen und zweyen Winkel, einander gleich sind, wodurch ein Rhombus entstehet; oder endlich, wenn nur zweyen Winkel und zwey Seiten allermal einander gleichen, da dann ein Rhomboides heraus kommt. Alle diese Gattungen von Vierecken werden mit einem Namen Parallelogramma genannt; und diese Vierecke theilet nun die Diagonallinie in zweyen gleiche Theile. Das wollen wir beweisen. Die 25. Fig. stellet einen Rhombus vor;

DB

DB ist die Diagonallinie. Nun ist nach Tab. II. den gegebenen Erklärungen fig. 25.

$$AB = DC$$

$$AD = BC$$

$$DB = DB.$$

$$\triangle ADB = \triangle DBC.$$

Eben so beweist man diesen Satz bey den Quadraten, länglichten Vierecken, und Rhomboiden. Wir wollen daher unsere Leser nicht ohne Noth damit aufhalten; das aber müssen wir noch erinnern, daß man diesen nun bewiesenen Satz sich wohl einprägen solle; wir werden ihn in der Lehre von dem Flächenmaas oder in der Planimetrie mit grossem Nutzen gebrauchen können. Soviel dürfen wir vorläufig schon sagen, und unsere Leser werden es auch verstehen, daß alle nur mögliche geradelinichte Dreyecke verdoppelt, und durch diese Verdopplung in ein regulaires Viereck, nemlich entweder in ein Quadrat, oder Rectangulum, oder Rhombus oder Rhomboides verwandelt werden können. Uebrigens haben wir den Namen eines regulären Vierecks allen diesen Gattungen mit Fleiß gegeben: denn ohnerachtet das Quadrat das regulairteste ist, und man sonst die regulaire Vierecke durch solche Figuren erklärt, welche lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel haben, so glaubten wir doch, wir könnten bey dem Viereck eine Ausnahme machen; weil die be-

Die Diagonallinien theilen alle Parallelogramma in zween vollkommen gleichen Theile.

Und ein jedes geradelinichte Dreyeck kann durch die Verdopplung in ein Parallelogramm verwandelt werden.

namfte Gattungen in der That viel regulaires haben, und ein Anfänger die Sache besser faffet, wenn man verschiedene Dinge, die vieles mit einander gemein haben, unter eine Hauptgattung bringet. Was aber die andere Vielecke betrifft, so behalten wir die gewöhnliche Eintheilung und Erklärung bey. Um nun wieder auf die Vierecke zu kommen, so wird der Winkel im Quadrat und länglichten Rectangulo allemal ein rechter Winkel seyn. Denn die Summe aller Winkel im Viereck macht 360° ; im Quadrat und Rectangulo sind alle vier Winkel einander gleich, nach der gegebenen Erklärung; folglich ist ein jeder $= \frac{360}{4} = 90^\circ$, das ist ein rechter Winkel. Wenn in dem Rhombus oder Rhomboides ein Winkel gegeben ist, so wird man die übrigen leicht finden können. Denn es seye ein Winkel 30° , so wird der gegenüberstehende auch 30° , folglich zween 60° seyn; da nun alle vier zusammen 360° machen, so werden die zween übrige 300° , folglich weil beide gleich sind, einer 150° halten. Alle Vierecke, welche zu den bisher benamften Gattungen nicht gehören, sind irregulair; sie werden auch mit einem besondern Namen Trapezia genannt. Dergleichen eines in der 26. Fig. vorgestellt wird.

§. 153. Nach den Vierecken kommen die übrige Vielecke vor; nemlich Fünfecke, Sechse,

Der Winkel im Quadrat und Rectangulo ist allemal ein rechter.

Von denen Winkeln des Rhombus und Rhomboides.

Was die Trapezia seyen.

Sechsecke, Siebenecke u. s. w. welche mit einem allgemeinen Namen Vielecke genannt werden. Sie sind entweder regulair oder irregulair: jene bestehen aus lauter gleichen Seiten und Winkeln; diese aber nicht. Beide werden durch Diagonallinien in so viel Dreiecke getheilt, als sie Seiten haben, weniger zwey; 3. E. ein Viereck hat vier Seiten, und kann in zwey Dreiecke, das ist $4 - 2$ getheilt werden; ein Fünfeck hat fünf Seiten, und kann in drey Dreiecke, das ist $5 - 2$ getheilt werden; ein Sechseck hat sechs Seiten, und kann in 4 Dreiecke, das ist $6 - 2$ durch die Diagonallinien getheilt werden u. s. w. wie man durch eine Induction bald zeigen kann. Wenn also die Anzahl der Seiten n ist, so werden die Dreiecke, daraus die Figur getheilt wird, $n - 2$ seyn; folglich siehet man abermal, wie man auch hier die Summe aller Winkel leicht finden könne: sie ist nemlich allemal $(n - 2) \cdot 180$. Fragt man, wie viel Diagonallinien gezogen werden können, so wird man auch durch die Induction es leicht ausmachen, daß in einem Viereck eine, im Fünfecke zwey, im Sechsecke drey u. s. w. folglich drey weniger, als das Vieleck Seiten hat, gezogen werden können. Wenn also die Anzahl der Seiten n ist, so ist die Summe aller Diagonallinien, die sich aber nicht durchkreuzen dürfen $= n - 3$. Nun

Alle Figuren welche mehr als vier Ecken haben, heißen mit einem allgemeinen Namen Vielecke oder Polygone.

Alle Vielecke lassen sich durch die Diagonallinien in so viel Dreiecke theilen, als sie Seiten haben, weniger zwey;

folglich kann man auch leicht die Summe aller Winkel im Vieleck finden.

Wie viel sich Diagonallinien, welche einander nicht durchkreuzen, in jedem Vieleck ziehen lassen.

Wie man die Seite und Winkel eines regulären Vielecks finden könne;

und was ein reguläres Vieleck seye.

Das reguläre Sechseck läßt sich geometrisch leicht bestimmen.

Kann man billig fragen: wie man die Seite eines regulären Vielecks finde? Es sind nun zwey, nemlich das Viereck und das Sechseck, das sich durch den Cirkel und lineal, ohne algebraische Rechnungen, bestimmen lassen. Ein reguläres Vieleck hat lauter gleiche Winkel, und zwar so viel Winkel als es Seiten hat; da nun die Summe aller Winkel $(n-2) \cdot 180$ ist, so wird der Winkel des regulären Vielecks allemal seyn $\frac{(n-2)180}{n}$. Wenn also $n=6$; so ist der Winkel des Sechsecks $\frac{(6-2)180}{6} = \frac{4 \cdot 180}{6} = \frac{2 \cdot 180}{3} = \frac{360}{3} = 120$.

Wenn ich nun einen Cirkel beschreibe, und den Radius zur Sehne mache, hernach aus dem Mittelpunkte C an die beiden Ende der Sehne wiederum Radios ziehe; sodann an die erste Sehne hin den Radius noch einmal als eine Sehne im Cirkel auftrage, und die vorige Operation fortsetze: so bekomme ich gerade den Polygonwinkel $2 \cdot 60 = 120$. Dann die beide Dreyecke sind gleichseitig, weil ihre Seiten lauter Radii sind, folglich haben sie auch drey gleiche Winkel; demnach ist ein jeder der dritte Theil von 180° der Summe der Winkel, das ist $\frac{1}{3} 180^\circ = 60$. Dieser Winkel wird im Sechseck verdoppelt; folglich wird ein reguläres Sechseck beschrieben, wenn man den Radius sechsmal in der

Perli

Peripherie eines Circels herumträgt. Weil man nun aus dem Mittelpunkt an alle Ecke des Vielecks oder Polygons Linien ziehen kann; so werden dadurch nicht nur so viel Dreiecke, als es Seiten hat, sondern auch so viel gleiche Winkel am Mittelpunkt entstehen. Da nun die Summe aller Winkel an dem Mittelpunkt herum zusammen genommen 360° ; so wird ein Winkel an dem Mittelpunkt, wenn die Anzahl der Seiten n heisset, seyn $\frac{360}{n}$; folglich im

Sechseck $\frac{360}{6} = 60$. Man siehet also,

daß man aus der gegebenen Anzahl der Seiten den Polygonwinkel und den Winkel am Mittelpunkt finden kann. Wird demnach die Seite wirklich gegeben, so läßt sich allemal ein Vieleck entweder geometrisch oder doch mechanisch beschreiben.

Wie sich ein jedes Vieleck mechanisch bestimmen lasse;

Dieses gehört nun zur ausübenden Mathematik; in der Civil- und besonders in der Militärbaukunst, bey Festungsgebäuden, hat die Lehre von den Polygonen ihren Nutzen. Wir lassen uns aber in das praktische nicht ein. Das regulairste Vieleck, nemlich das Quadrat, läßt sich auch geometrisch in den Circel einschreiben: denn man richtet nur auf dem Diameter zu beeden Seiten zwei gleichschen-

In welchem Theil der ausübenden Mathematik die Lehre von den Polygonen vorzüglich zu wissen nöthig seye.

lichte Dreiecke auf, deren Spitzen an die Peripherie stoßen, so werden sie zusammen ein völliges Quadrat ausmachen. Denn

Wie man ein Quadrat geometrisch bestimmen und in den Circel einschreiben könne.

die

die Winkel an der Peripherie sind rechte Winkel. S. 147. Folglich müssen die andere zween auch rechte seyn: dann die Hälfte von jedem ist 45° , weil die Dreyecke gleichschenkligh sind; demnach sind die Winkel selbst 90° groß. Eben so ist klar, daß alle vier Seiten gleich seyn müssen, weil die beede Dreyecke gleichschenkligh, und eines so groß als das andere ist. Durch Hülfe der Buchstabenrechnung kann man noch andere Vielecke finden, welche hernach geometrisch bestimmt werden können. Wir wollen auch einige Exempel im folgenden geben; ohnerachtet man in der Ausübung sich nicht viel darnach richtet, sondern gemeiniglich die Aufgabe mechanisch durch Hülfe der verschiedenen Instrumente auflöst. Dahero die hier je und je vorkommende algebraische Exempel mehr den Wiß zu schärfen vorgetragen werden, als daß sie sonst besonders brauchbar wären. Es giebt aber ohne diese noch andere, und weit schönere Exempel, welche die Scharfsinnigkeit üben, wie wir im folgenden sehen werden; dahero wir dißfalls uns kürzer ausdrücken dürfen: dann man siehet leicht, daß in der Buchstabenrechnung eine solche Menge von Exempeln möglich seye, deren Summe sich kaum bestimmen liesse. Wollte man nun so viele Exempel vortragen, so müßte man sich in die größte Weitläufftigkeit einlassen. Diß aber ist unserm

Vorläuffige
Anzeige, wie
sich auch an-
dere Vielecke
algebraisch
bestimmen
lassen.

unserm gegenwärtigen Vorhaben nicht gemäß.

§. 154. Wir haben alles vorgetragen, was in dem Längenmaas zu wissen nöthig ist; der Weg zum Flächenmaas oder zur Planimetrie ist also nunmehr gebahnet.

Vorbereitung zum Flächenmaas oder zur Planimetrie.

Die Fläche einer Figur wird betrachtet, in so ferne sie eine Länge und Breite aber keine Dicke hat; was demnach blos in die Länge und Breite ausgedehnt ist, das heißt man eine Fläche: nun kann ich eine Fläche nicht anders als wiederum mit einer Fläche ausmessen.

Flächen werden wiederum durch Flächen ausgemessen.

Die Frage ist also nur diese: was ich für eine Fläche zum Maas annehmen soll, ob sie rund, oder viereckicht, oder dreieckicht u. s. w. seyn solle?

Was man für eine Fläche zum Maas annehmen solle,

Die Antwort wird wol diese seyn: man solle diejenige Fläche wählen, welche die schicklichste ist. Nun werden wir bald erfahren, daß die viereckichte Fläche, welche gleich lang und breit ist, das ist ein Quadrat, am dienlichsten sey, alle andere Flächen auszumessen, und daß der einem natürlichen Weise einfallende Gedanke, wie man dann mit einem vollkommenen Viereck, wenn es auch noch so klein wäre, in die Spitze der Dreiecke hinein kommen, und selbige ausmessen könne, durch den Weg der Reduction von selbst sich werde heben lassen.

und wie die viereckichte, und unter diesen das Quadrat, die schicklichste seye, und zum Maas aller möglichen Flächen gebraucht werden könne.

Wir nehmen also zum Maas aller nur denkbaren Flächen ein Quadrat oder eine viereckichte Fläche, die rechtwinklicht

Ob man dann mit einem Viereck die in spitze Flächen sich verlierende

und

Dreypede u. s. w. auch ausmessen könne, und wie man sich dinstfalls durch die Reduction oder Verwandlung einer Fläche in eine andere helfe.

Tab. II.
Fig. 28.

Wie man eine rechtwinklichte Fläche, das ist ein Quadrat oder ein Rectangulum, wirklich ausmesse.

und wie man das Maas kürzer und schneller finden könne, nemlich durch die Multiplication der Grundlinie in die Höhe, oder im Quadrat, durch die Multiplication der Grundlinie mit sich selbst.

und gleich lang und breit ist, dergleichen in der 27 Fig. neune angebracht sind, und sehen, weil man mit den leichtesten und gewissten Exempeln den Anfang machen muß, wie oft sich ein solches Viereck in einem andern rechtwinklichten Viereck herum legen lasse. Wenn man z. E. von Papier eine Fläche so groß als ABCD in der Fig. 28. ausschneidet, und hernach eine kleinere auch von Papier ausgeschnittene Adef zum Maas annimmt, so legt man die kleinere in der größern so oft herum, als man kann, und merkt sich hernach die Zahl, wie oft man die kleinere Fläche in der größern herum gelegt habe; da dann der Inhalt der Fläche selbst, z. E. in der vorgegebenen Fläche durch 15 kleinere und zum Maas angenommene Flächen, bestimmt wird. Nun begreift man leicht, daß wir dieses Maas kürzer finden können. Denn wenn ich die Figur ansehe, so finde ich, daß durch diese fünfzehnmahlige Umlegung der kleinern Fläche die Grundlinie AD in fünf, und die Höhe AB in drey gleiche Theile getheilt werde, weil die kleinere Fläche sich selbst überall gleich bleibt. Ich würde also, wenn ich die Grundlinie oder die Breite = 5' mit der Höhe = 3' multiplicire, auf einem kürzern Weg eben so viel gefunden haben, als wenn ich meine zum Maas angenommene Fläche wirklich 15mal herum gelegt hätte. Eben so finde ich

ich in der 27. Fig. wenn die Breite und Tab. II. Höhe gleich ist, das ist, wenn $AB = AD$, fig. 27. einerley Inhalt, ich mag die angenommene Fläche z. E. in der vorgegebenen Figur neunmal wirklich herum legen, oder blos die Grundlinie $AD = AB = 3$, mit sich selbst multipliciren; dann weil die Höhe und Breite einerley ist, so ist $AD \cdot AB = AD \cdot AD = AD^2 = 3 \cdot 3 = 3^2 = 9$. Man wird daher am besten thun, wenn man bey einem vorgegebenen rechtwinklichten Viereck die Breite mit der Höhe, und wenn die Höhe der Breite gleich ist, die Breite mit sich selbst multiplicirt; des Product muß allemal der gesuchte Inhalt der Fläche seyn. Wenn also die Breite 5' und die Höhe 3' beedes nach dem Längenmaas hält, so wird der Inhalt des ganzen Vierecks nach dem Flächenmaas seyn 15'; von welchen 15' ein jeder Flächen-
schuh einen Schuh lang und einen Schuh breit ist. Weil nun im Längenmaas ein Schuh 10'' hält, so wird ein Schuh im Flächenmaas $10 \cdot 10'' = 100''$ halten. Dann weil die Breite und Höhe gleich ist, oder weil die Breite 10'' und die Höhe 10'' beträgt, so darf ich nur 10 mit 10 multipliciren, da dann das Product 100'' einen Schuh im Flächenmaas geben wird. Ein solcher Schuh heißt ein Quadrat-
schuh, weil alle rechtwinklichten Vierecke, die gleich lang und breit sind, Quadrate heißen.

Aus dem bisherigen wird erwiesen und gezeigt, wie groß ein Schuh im Flächenmaas seyn müsse u. s. w. nemlich ein Quadratschuh hält 100 Quadr. Zoll; eine Quadratruthe 100 Quadratschue u. s. w.

400 Geom. I Cap. Von der dreysfachen

welches aus
der Decimal-
progression
im Längen-
maas erhel-
let,

dahero man
im Quadrat-
maas, das
von 100 zu
100 gehet, al-
lemal je zwey
Zahlen für
die Fulle,
Schuhe u. s.
w. abschnei-
det;

Wie viel Zoll
auf einen
Schuh, und
wie viel
Schuhe auf
eine Ruthe
von den Feld-
messern in
unsrem Lande
gerechnet
werden:

helffen. Da nun eine geometrische Ruthe 10' lang ist, so wird auch eine Quadratruthe 10: 10' das ist, 100 Quadratschuhe in sich halten; auf gleiche Weise findet man, daß ein Quadrat Zoll, der 10''' lang und breit ist, 100 Quadratlinien in sich begreift. Demnach gehet das Flächenmaas von hundert zu hundert; und wie z. E. im Längenmaas 10 Zoll einen Schuh, 10 Schuh eine Ruthe geben, so machen im Flächen- oder Quadratmaas erst 100 Quadrat Zoll einen Quadratschuh, und 100 Quadratschuhe eine Quadratruthe aus. Dahero muß man allemal je zwey und zwey Zahlen für die Quadratlinien, Fulle und Schuhe abschneiden; z. E. 2486759''' sind $2^{\circ} 48' 67'' 59'''$, das ist, 2 Ruthen, 48 Schuhe, 67 Zoll, 59 Linien im Quadrat. Die Sache ist leicht begreiflich. So oft ich von einer niedern Gattung meines Maases 100 habe, so oft bekomme ich eine Einheit für die unmittelbar folgende Gattung entweder der Schuhe, oder Ruthen u. s. w. Z. E. 124' im Quadratmaas sind eine Ruthe und 24 Schuhe; weil 100 Schuhe eine Ruthe ausmachen, folglich $100' + 24' = 1^{\circ} 24'$. Ich denke, ich habe mich jetzt so deutlich genug ausgedrückt. Im geometrischen Maas hie und da ab, wie wir schon gezeigt haben. Bey uns

uns hält im Längenmaas eine Ruthe 16' und wie in
 folglich eine Quadratruthe $16 \cdot 16' = 256'$; der Ausüb-
 ein Schuh hält im Längenmaas 12 Zoll, ^{bung daffalls}
 folglich ein Quadratschuh $12 \cdot 12 = 144''$
 u. s. w. Die Geometrie bleibt bey ihrer ^{keine allge-}
 Progression von 10 zu 10, und im Qua- ^{meine Uebere-}
 dratmaas von 100 zu 100, wie im Cubic- ^{einstimmung}
 maas von 1000 zu 1000: wer aber die ^{sich finde,}
 Geldmestkunst dazu lernen und ausüben
 will, der muß sich erkundigen, was man ^{folglich man}
 in demjenigen Land, wo er sein Brod das ^{eben sich nach}
 mit verdienen will, für ein Maas habe; ^{den Gewohn-}
 in welchem Fall er hernach bald fortkom- ^{heiten eines}
 men wird. Damit aber geben wir uns, ^{jeden Landes}
 nach unserm schon mehrmalen angezeigten ^{richten müsse}
 Vorhaben, gar nicht ab. Unsere Leser
 werden daher auch keine weitere Nach-
 richten von dem Geldmessen u. s. w. von
 uns erwarten. Uns genüget, daß wir ge-
 zeigt haben, wie man überhaupt eine Glä-
 the ausmesse, und wie man ein beliebiges
 Viereck, wenn es nur rechtwinklicht und
 gleich lang und hoch ist, dazu wählen dür-
 fe, es mag hernach die Länge des Schu-
 hes nach dem Arm oder nach dem Fuß ei-
 nes Mannes oder eines Kindes u. s. w.
 angenommen werden. Nur muß man,
 wenn das Maas einmal angenommen und
 festgesetzt worden ist, in der ganzen Rech-
 nung beständig dabey bleiben.

§. 155. Die nächste Frage meiner Les-
 er wird jezo wol diese seyn, wie man es

Wie man
schiefe Pa-
rallelogram-
ma auf recht-
winklichte
reduciren
und ausmef-
sen solle.

Versuch, ob
die Ver-
wandlung
angeht;

Tab. II.
Fig. 19.

und was
man, die Be-
dingung des
Versuchs zu
vollenden,
für Linien zie-
hen müsse.

make, wenn man schiefstliegende Figuren, und zwar erstlich Vierecke, die keine rechte, sondern stumpfe, oder spitzige Winkel haben, auszumessen hätte, dann aus dem bisherigen versteht man noch nicht, wie man in diesem Fall zu Werke gehen solle. Wir wollen zuerst einen Rhombus oder Rhomboides betrachten. Ich solle ihn durch ein rechtwinklichtes Viereck ausmessen. Das aber läßt sich nicht thun, daß ich ihn durch die Reduction in ein rechtwinklichtes Viereck verwandle, welches von einerley Grösse ist. Nun will ich einen Versuch wagen, ob etwa diese Verwandlung angeht. Die auszumessende Figur seye der Rhomboides ADFG; Ich sehe wohl, daß ich mit meinem rechtwinklichten Viereck, in der 27. und 28. Figur, durch das Herumlegen derselben, bey den spitzigen und stumpfen Winkeln in F und G nicht wohl zukommen kann, und doch möchte ich gern das Maas so genau wissen, als es möglich ist. Ich versuche daher die Verwandlungskunst. Wenn ich die Figur ADFG in die Figur ABCG also verwandeln kann, daß ABCG ein rechtwinklichtes Viereck und der vorigen Figur vollkommen gleich ist, so werde ich aufs genaueste ausmessen können. Man mache also einen Versuch, und verlängere die Linie DF, welche mit AG, kraft der Natur des Rhomboides parallel ist; bis in B; hernach

hernach richte man auf AG ein rechtwinkliches Viereck auf, dessen Grundlinie AG und dessen Höhe die Distanz der beeden Parallellinien, folglich die Perpendiculars-
linie CG oder AB ist; so wird ABCG ein rechtwinkliches Viereck seyn, dessen Inhalt AG . AB ist. S. 154. Nun wollen wir sehen, ob es dem Rhomboides ADFG gleich ist; dann in diesem Fall hätten wir seinen Inhalt hernach schon gefunden. Man betrachte die zwey Dreiecke BAD und CGF, welche wie ein lateinisches W gleichsam in einander stecken; so wird man bald sehen, daß sie einander gleich und ähnlich seyen. Hat man das gefunden, so subtrahire man beiderseits das Stück CED, und addire wieder beiderseits das Stück AEG; da sich dann ergeben wird, daß $ABCG = ADFG$. Wir wollen den Beweis hersehen. Zuerst beweisen wir, daß die Linie BD gleich seye der Linie CF: dann

$$\begin{array}{l} BC = AG \text{ weil es Parallellinien} \\ DF = AG \text{ sind, folglich} \\ \hline BC = DF \\ CD = CD \\ \hline BC + CD = CD + DE \text{ das ist} \\ BD = DF. \end{array}$$

Beweis, daß
die Vers
wandlung
vollkommen
angehe.

Jetzt können wir erst beweisen, daß die beede Dreiecke BAD und CGF einander gleich seyn. Dann, wie wir bewiesen haben, so ist

EC a

BD

$BD=CF$, ferner §. 152.

$BA=CG$

$DA=FG$ folglich §. 144. nr. I.

$\triangle BAD=\triangle CGF$ ferner §. 9.

$\triangle CED=\triangle CED$ subtrahirt:

$\triangle BAD-\triangle CED=\triangle CGF-\triangle CED$, das ist, wenn man die Figur ansieht:

$BAEC = DEGF$. Nun ist;

$\triangle AEG = \triangle AEG$ dieses addirt, giebt

$BAEC + \triangle AEG = DEGF + \triangle AEG$; d. i. wenn man die

$ABCG = ADFG$. welches zu erweisen war: Figur ansieht:

Wie man den Beweis der Phantasie deutlich machen könne.

Allgemeine und höchst-fruchtbare Hauptregel, daß alle Parallelogramma von einerley Grundlinien und Höhen einander gleich seyen; und wie man die Gleichheit, Ähnlichkeit und Congru-

Wenn es einem ungewohnt ist, bald ein Stück hinweg, bald wieder hinzu zu denken oder zu sehen, so darf er nur so zwei Figuren von Pappendeckel oder Chartenpapier ausschneiden, und selbige in der Ordnung, wie die Figur aufweist, auf einander legen, so wird er den Beweis seiner Phantasie so klar machen, als es möglich ist. Der Lehrsatz selbst ist von grossem Gewichte, und wird in Worten also ausgedruckt: **Zwey Parallelogramma, welche einerley Grundlinie und Höhe haben, sind einander gleich.** Wir sagen gleich, nicht aber, ähnlich. Unsere Leser werden dahero an die Sätze von der Gleichheit und Ähnlichkeit in die Einleitung §. 10. zurück denken. Denn ein anders ist congruent oder beedes gleich und ähnlich, ein anders hingegen allein gleich.

gleich, nicht aber auch ähnlich seyn. Ferner werden sie verstehen, was wir durch die Höhe anzeigen; nemlich eine Perpendicularlinie, welche zwischen denen beeden Parallellinien, worein die Figuren fallen, oder welche von dem Ende einer Figur auf ihre Grundlinie herabgezogen wird. So ist z. E. die Höhe eines mit Fleiß schief gebauten Thurms, der gleichen einer zu Bononien seyn solle, nicht die Schiefe, sondern die senkrechte Linie, die von der Spitze auf die Erde perpendicular herabgefället wird. Eben so ist auch die Höhe des Dreuecks ACB nicht CB oder AC, sondern die Perpendicularlinie CD: dann so weit steht seine Spitze C von der Grundlinie AB, welche bis D verlängert würde, ab.

enz wohl unterscheiden müsse;

was man durch die Höhe einer Figur verstehe, wird umständlich erklärt.

Tab. II.
Fig. 30.

Dem bisher gegebenen Beweise von Verwandlung der Parallelogrammen wollen wir noch einen beyfügen, woraus man lernt, daß ein jedes Quadrat in ein Rectangulum und umgekehrt verwandelt werden kann. Man verlängere von dem gegebenen Quadrat FIDE die Seite DE, bis DC der Höhe des Rectanguli gleich ist, in welches man es verwandeln will; man ziehe von C durch I die Linie CG, welche die verlängerte FE in G schneidet; man mache das Dreueck AGC dem Dreueck EGC gleich; so wird ABIH = IDEF: dann es ist

Tab. I.
fig. 22.
ß.

$$\begin{array}{l}
 \triangle EGC = \triangle AGC \\
 \triangle GIE = \triangle GHI. \quad \text{subtr.} \\
 \triangle EGC - \triangle GIE = \triangle AGC - \triangle GHI \text{ d. i. in der Figur} \\
 FICE = ACIH, \quad \text{weil ferner} \\
 \triangle BIC = \triangle DCI; \text{ diese subtr. lassen} \\
 FICE - BIC = ACIH - DCI, \text{ das ist in der Fig.} \\
 FIDE = ABIH.
 \end{array}$$

Wenn also in einem Parallelogramm die Diagonallinie gezogen, und in selbiger nach Belieben ein Punkt, wie Langenommen wird, durch welchen man mit der Seite des Parallelogramms die Parallellinien HD und BF zieht, so entstehen vier Parallelogramme, von welchen die zwey, durch welche die Diagonallinie nicht geht, einander gleich sind. Auf eine ähnliche Weise begreift man, daß sich Triangel in Parallelogramme und umgekehrt verwandeln lassen, wie ich in meinem mathem. Lehrbuch ausführlich gezeigt habe.

Neue Frage, wie man dann die andere Figuren, welche keine Parallelogramma sind, und gar nichts regulaires haben, ausmesse.

Beantwortung der Frage, wobey gezeigt wird,

J. 156. Nun wird man nicht ohne Grund weiter einwenden, und sagen: es giebt nicht lauter Parallelogramma, die man ausmessen solle; sondern auch ganz irreguläre Vierecke, und überhaupt sowohl regulärer als irregulärer Vielecke eine Menge. Wir haben also für das Maas dieser letztern noch nichts gewonnen. Allein es ist durch den schon erwiesenen Lehrsatz dennoch ungemein viel, ja alles gewonnen: dann wir lernen dadurch alle nur mögliche geradelinichte Dreyecke ausmessen. Da sich nun alle geradelinichte Figuren,

guren, sie mögen Namen haben, was sie für wollen, durch Diagonallinien in Dreiecke eintheilen lassen: so können wir durch Hülfe unseres erwiesenen Lehrsatzes alle nur denkbare geradelinichte Figuren genau ausmessen. Wie man nun ein Dreieck überhaupt nach dem Lehrsatz §. 151. ausmessen könne, wollen wir jezo zeigen. Ein jedes Dreieck kann duplirt und durch die Duplirung in ein Parallelogramm verwandelt werden, es mag hernach ein Quadrat oder Rhombus oder Rectangulum oder Rhomboides seyn. §. 152. Folglich ist ein Dreieck allemal die Hälfte von einem Parallelogrammo, das einerley Grundlinie und Höhe mit ihm hat. Da man nun alle Parallelogramma genau ausmessen kann, so wird man auch ihre Hälfte ausmessen können. Das siehet man in der Figur selbst. Man ziehe die Diagonallinien AC und AF; so wird §. 152. der $\triangle ABC = \triangle ACG$, und der $\triangle ADF = \triangle AFG$. Folglich $AGC = \frac{1}{2} ABCG$, und $AFG = \frac{1}{2} ADFG$. Nun ist der Beweis leicht zu verstehen.

$$ABCG = ADFG \text{ §. 154.}$$

$$\text{-----} : 2$$

$$\frac{1}{2} ABCG = \frac{1}{2} ADFG.$$

$$\triangle AFG = \frac{1}{2} ADFG$$

$$\frac{1}{2} ABCG = \triangle AFG$$

$$\frac{1}{2} ABCG = \frac{AG \cdot AB}{2} \text{ §. 153.}$$

$$\triangle AFG = \frac{AG \cdot AB}{2} = AG \cdot \frac{1}{2} AB.$$

Ec 4

Also

daß man durch den obigen Lehrsatz §. 155. alle nur mögliche geradelinichte Dreiecke ausmessen könne, folglich auch alle geradelinichte Figuren, weil sie sich in Dreiecke theilen lassen.

Das Flächenmaas eines geradelinichten Dreiecks ist das Product der Grundlinie in die halbe Höhe, Tab. II. fig. 29.

Also ist das Maas eines noch so schiefen Dreyecks das Product aus der Grundlinie in die halbe Höhe ; oder das halbirte Product aus der Grundlinie in die Höhe ; oder das Product aus der Höhe in die halbe Grundlinie : dann alle diese Ausdrücke gelten gleichviel. Demnach ist der Inhalt des Dreyecks ACB in der 30. Figur gleich dem Product aus seiner Grundlinie AB multiplicirt in die halbe Höhe $CD = AB \cdot \frac{1}{2} CD = \frac{AB \cdot CD}{2} = CD \cdot \frac{1}{2} AB$.

Ein jedes geradelinichtes Dreyeck kann in ein vollkommenes Quadrat verwandelt werden.

Warum alle geradelinichte Figuren sich vollkommen ausmessen lassen.

Tab. II.
fig. 32.

Oder wenn wir AB setzen = b und CD = a, so ist der Inhalt = $\frac{ab}{2}$. Wenn ich also aus $\frac{ab}{2}$ die Quadratwurzel extrahire, so habe ich die Seite von einem Quadrat, das dem Dreyeck ACB vollkommen gleich ist. Wie man dieses geometrisch bemerkstelligen könne, wollen wir an seinem Ort zeigen. Uebrigens siehet man, daß sich durch Hilfe des erwiesenen Lehrsatzes alle mögliche geradelinichte Figuren ausmessen lassen: denn ihr Inhalt ist eben allemal die Summe aller durch die Diagonallinien darinn beschriebener Dreyecke; und es kann nicht anders seyn, weil nothwendig das ganze seinen wirklichen Theilen zusammen genommen allemal gleich ist. Bey den Trapezien, welche zwey parallele Seiten haben, gehet die Rechnung noch leichter: dann ihr Inhalt ist das Product der halben Summe der parallelen Seiten in die Höhe; man

man sehe nur die 22. Fig. so wird sich leicht
geben: $ABC = \frac{1}{2} AC \cdot EB$

$$BDC = \frac{1}{2} BD \cdot EB$$

$$ABDC = (\frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} BD) EB.$$

§. 157. Das aber könnte einem noch fremder vorkommen, daß man auch durch Hülfen dieses nemlichen Lehrsatzes die Circel, folglich krummlinichte Figuren, so ziemlich genau ausmessen könne. Denn die vollkommene Quadratur des Circels ist noch jezo eine Aufgabe, deren Erfindung zwar nicht so einträglich, aber doch schön wäre. Inzwischen ist man der Wahrheit durch die versuchte Rectification der Peripherie so nahe gekommen, daß man, wenn die Circel nicht allzugroß sind, keinen mercklichen Fehler begeht. Vorläufig muß man sich aus dem vorhergehenden §. erinnern, daß ein Triangel leicht in einen andern gleich grossen verwandelt werden könne, wenn man durch seine Spitze H mit der Grundlinie BD eine Parallellinie FC ziehet, und sodann nach Belieben andere Dreyecke, wenn sie nur einerley Grundlinie haben, und zwischen einerley Parallellinien stehen, z. E. das Dreyeck DCB u. s. w. beschreibet. Demnach wird das Dreyeck DCB = DHB; ferner ECD = EGD, u. s. w. Wenn nun, wie wir setzen wollen, alle Dreyecke AFE, EGD, DHB einerley Höhe haben, so wird das grosse

Ob und wie man auch eine Circelfläche durch Hülfen des obigen Lehrsatzes ausmessen könne.

Wie mehrere Dreyecke von gleicher Höhe Tab. II. fig. 31. he u. Grundlinie in ein einiges verwandelt werden.

Es 5 ΔACB

410 Geom. Cap. Von der dreyfachen

$\triangle ACB$ der Summe dieser Dreyecke zusammen genommen gleich seyn. Dann

$$\triangle DHB = \triangle DCB$$

$$\triangle EGD = \triangle ECD$$

$$\triangle AFE = \triangle ACE$$

$$\begin{array}{rcl} \triangle DHB + \triangle EGD + \triangle AFE & = & \triangle DCB + \triangle ECD + \triangle ACE. \\ \triangle ACB & & = \triangle DCB + \triangle ECD + \triangle ACE. \\ \hline \triangle ACB & = & \triangle DHB + \triangle EGD + \triangle AFE. \end{array}$$

Nun kann der Cirkel betrachtet werden als ein Unendlich Eck, oder als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten; deren jede die Grundlinie von einem Dreyeck ist, dessen Spitze in den Mittelpunkt gehet, und dessen Höhe dem Radius gleich ist, weil die Grundlinie unendlich klein, und folglich die Perpendicularlinie von den Schenkeln des Dreyecks fast um gar nichts unterschieden ist. Wenn nun der Cirkel in Gedanken aufgemacht wird, so daß die Peripherie in eine gerade Linie sich verwandelt, so werden die unendlich viele Dreyecke, wie diejenige, die in der 31. Figur gezeichnet sind, im kleinen aussehen; folglich kann man die Summe aller dieser Dreyecke in ein einiges, wie $\triangle ACB$, verwandeln, dessen Höhe der Radius BC , und dessen Grundlinie die Peripherie AB ist; folglich wird der Inhalt seyn $\frac{AB \cdot BC}{2}$. Wenn

man nun die Peripherie des Cirkels π und den Radius r nennet, so ist der Inhalt des

Cirkels $\frac{\pi r}{2}$. Auf diesen Ausdruck ist der

große Mathematicus Keppler, wie vor ihm

Was man durch diese Verwandlung bey dem Maas der Cirkels Fläche gewinnt, und wie ein jeder Cirkel in ein Dreyeck sich verwandeln lasse, dessen Höhe der Radius und dessen Grundlinie die Peripherie ist.

Ein Ausdruck, auf welchen der

dem Archimedes auf die Figur, zuerst ge- große Repp-
 fallen. Wenn man also wüßte was π wä- ler zuerst
 re, so würde der Inhalt des Cirkels genau gefallen ist.
 gefunden werden; und der Ausdruck $\frac{\pi r^2}{2}$ Der Aus-
 würde sich auf alle Cirkel anwenden lassen, druck ist all-
 weil sie alle einander ähnlich sind S. 10. gemein, und
 oder weil der Radius eines kleinen Cirkels schicket sich
 sich zu seinem Cirkel verhält wie der Ra- auf alle
 dius eines grossen Cirkels zu seinem Cir- Cirkel;
 kel. S. 140. Man kann auch die fünfte Tab. I.
 Figur damit vergleichen, aus welcher er- fig. 5.
 hellet, daß alle mögliche Cirkel einen ge-
 meinschaftlichen Mittelpunkt haben, oder
 concentrisch vorgestellt werden können; da-
 hero die Bögen BD und bd, folglich auch
 die ganze Peripherien sich verhalten müssen
 wie die Radil CB und Cb; wie wir unab-
 hängig von dem Cirkel im folgenden erwei-
 sen werden. Man merket also, daß die weil der Ra-
 Verhältniß des Radius, folglich auch des dius zur Per-
 doppelten Radius oder des Diameters zur ipherie im-
 Peripherie beständig bleibt, und nicht ver- mer einerley
 ändert wird; die Cirkel mögen groß oder Verhältniß
 klein seyn. Weil wir aber keinen Aus- hat.
 druck für die Cirkelfläche finden können, Warum aber
 in welchem die Peripherie nicht mit in die dem unges-
 Rechnung käme, so wäre freylich zu wün- achtet der
 schen, daß man sie rectificiren oder in eine Cirkel nicht
 getade Linie verwandeln könnte. Accurat völlig quas-
 hat sich diese Verwandlung bisher noch dritt, oder in
 nicht finden lassen; doch ist man der Wahr- ein Quadrat
 heit verwandelt
 heit werden kon-
 heit ne;
 heit

412 Gegn. I Cap. Von der dreyfachen

wie man aber doch dem wahren Quadrat durch mühsame Rechnungen so nahe gekommen, daß der Fehler bey nicht gar zu grossen Eirkeln, fast unmerklich ist,

heit durch mühsame und lange Rechnungen so nahe gekommen, daß der Fehler bey kleinen Eirkeln fast gar nichts beträgt. Denn man hat innerhalb des Eirkels, wie auch ausserhalb um ihn herum zwey Vielecke beschrieben, deren Sehnen so klein angenommen wurden, als man konnte; zwischen diese beyde Vielecke fällt nun natürlicher Weise die Peripherie des Eirkels hinein; sie ist also die mittlere Proportionalinie zwischen dem unmittelbar grössern und kleinern Vieleck. Man hat sie berechnet, und gefunden, daß die Verhältniß des Diameters zur Peripherie bey nahe seye wie 100 zu 314. Dieses Verhältniß muß man nun auswendig behalten, wenn man einen Eirkel berechnen will. Denn es seye der Diameter eines Eirkels 20', so wird man nach den Proportionsregeln sagen müssen:

$$100 :: 314 = 20 : \frac{20 \cdot 314}{100}$$

welches die Peripherie des gesuchten Eirkels in einer geraden Linie bey nahe seyn wird. Wenn ich sie nun mit $\frac{1}{2}r$, das ist, weil der Diameter $2r = 20$, mit $\frac{1}{4}$ multiplicire, so habe ich die Fläche des Eirkels. Ich muß also die Peripherie mit dem vierten Theil des Diameters multipliciren; denn der halbe Radius ist allemal der 4te Theil des Diameters. Es sey der Diameter

woraus die bey nahe wahre Fläche eines Eirkels sich bestimmen läßt.

$a =$

$$a = 2r$$

$$\text{so ist } \frac{1}{2}a = r$$

$$\text{und } \frac{1}{4}a = \frac{r}{2} = \frac{1}{2}r.$$

Der Ausdruck $\frac{\pi r^2}{2}$ ist also eben so viel, als $\frac{a\pi}{4}$

wenn a der Diameter ist. Will ich aus der gegebenen Peripherie π den Diameter finden, so setze ich,

$$314 : 100 = \pi : \frac{100 \cdot n}{314}, \text{ welches Tab. I.}$$

der gesuchte Diameter seyn wird. Eben so finde ich einen gegebenen Bogen z. E. RB, und sodann den Circelausschnitt (sectorem circuli) RCB, wenn die Peripherie π , der Diameter a und der Bogen $RB = n^\circ$ gesetzt wird. Nun suche ich zuerst die Peripherie, und sage

$$100 : 314 = a : \frac{314 \cdot a}{100} \text{ ferner den}$$

Theil der Peripherie RB, oder den Bogen n , durch eine gleiche Verhältniß nach den Graden J. 140; da es dann heißt

$$360^\circ : n^\circ = \frac{314 \cdot a}{100} : \frac{314 \cdot a \cdot n^\circ}{100 \cdot 360}$$

So heißt der in eine gerade Linie verwandelte Bogen RB. Wenn ich ihn nun mit dem vierten Theil des Diameter multiplizire; so habe ich $\frac{314 \cdot a^2 \cdot n^\circ}{400 \cdot 360}$, welches der

Inhalt des flachen Sectors RCB ist.

Man kann daher aus dem Diameter die Peripherie, aus der Peripherie den Diameter,

fig. 4.

ferner aus dem Diameter u. einem in Graden gegebenen Bogen den Ausschnitt eines Circels durch die Proportionsregeln finden.

Hieraus erhellet weiter, daß es eine beständige Verhältniß zwischen dem Quadrat des Diameters und der Fläche des Eirkels, nemlich 1000:785 gebe.

§. 157. Wenn der Diameter 100 ist, so ist sein Quadrat $100 \cdot 100 = 1000$; und wenn die Peripherie $314'$ hält, so ist die Fläche des Eirkels $314 \cdot \frac{100}{4} = 7850$; wenn man nemlich wirklich multiplicirt. Folglich verhält sich das Quadrat des Diameters zur Fläche des Eirkels selbst wie 1000 zu 7850; oder

$$100^2 : \frac{314 \cdot 100}{4} = 10000 : 7850, \quad \text{das ist, wenn man beiderseits mit 10 dividirt:}$$

$$= 1000 : 785.$$

und daß alle Eirkelflächen sich zu einander verhalten wie die Quadrate ihrer Diameter.

Nun wollen wir zween Eirkel betrachten; einen grossen und kleinen; die Fläche des einen solle C, des andern c heißen: der Diameter des grössern C solle A, des kleinern aber a seyn; so wird seyn

$$A^2 : C = 1000 : 785$$

$$a^2 : c = 1000 : 785 \quad \text{folglich}$$

$$A^2 : C = a^2 : c, \quad \text{und durch die Vertauschung der mittlern Glieder}$$

$$A^2 : a^2 = C : c.$$

Das heißt in Worten ausgedruckt: die Flächen der Eirkel verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Diameter. Ein Lehrsatz, den man sich wohl bekannt machen muß; denn er wird im folgenden öfters genuket werden.

§. 158. Jetzt kommen wir auf einen höchstwichtigen Lehrsatz, welchen Pythagoras

goras erfunden, und dafür durch seine Zuhörer ein Dankopfer von hundert Ochsen oder eine Hecatomb demjenigen grossen Gott gebracht hat, der ihm die Gabe verliehen, solche wichtige Entdeckungen zu machen. Eine Ehrerbietung und Bescheidenheit, welche von der gelehrten Nachwelt zwar gelobt aber selten nachgemahmet wird. Pythagoras hat die Seite, die in einem rechtwinklichten Dreieck dem rechten Winkel entgegen steht, die Hypothenuse, und die beide übrige Seiten, die den rechten Winkel einschließen, die Cathetos genannt, und seinen erfundenen Lehrsatz hernach also ausgedruckt: Das Quadrat der Hypothenuse ist gleich den Quadraten der beiden Cathetorum zusammen genommen. Das ist, nach der Figur: das Quadrat auf der Linie AB, oder ABDE ist gleich den Quadraten auf der Linie AC und CB, oder ACIK und CBGH. Das wollen wir jetzt beweisen. Man ziehe die Linien AG und CD, so wird man bald sehen, daß die Dreiecke ABG und DBC einander gleich sind; wenn man das einmal bewiesen hat, so ist das Fundament zum folgenden ganzen Beweis gelegt, wenn man nur die Parallellinie CF, und die zwei Diagonallinien LD und CG vollends zieht. Nach unserer Bedingung ist also

Vorbereitung zu dem wichtigen Lehrsatz, welchen Pythagoras erfunden hat.

Das die Hypothenuse und was die Catheti in einem rechtwinklichten Dreieck seyen.

Tab. II.
Fig. 33.

Der Lehrsatz selbst, nemlich: das Quadrat der Hypothenuse ist den beiden Quadraten der Cathetorum gleich,

wird uns stündlich erwiesen.

$m = n$, dann alle Winkel im Quadrat
sind rechte Winkel §. 152.

$$o = 0$$

folglich §. 9.

$$m + o = n + o, \text{ ferner}$$

$AB = BD$, weil alle Seiten in einem
 $BG = BC$ Quadrat einander gleich
sind;

folglich §. 144. nr. II.

$$\triangle ABG = \triangle DBC. \text{ Ferner §. 156.}$$

$$\triangle DBL = \triangle DBC$$

also

$$\triangle DBL = \triangle ABG \text{ ferner §. 156.}$$

$$\triangle CBG = \triangle ABG$$

demnach §. 9.

$$\triangle DBL = \triangle CBG \text{ das ist §. 156.}$$

$$\frac{1}{2} DBLF = \frac{1}{2} CBGH. \text{ Folglich}$$

. 2

$$DBLF = CBGH = CB^2; \text{ Eben so beweist}$$

$$ALFE = ACIK = AC^2 \text{ man, daß}$$

folglich

$$DBLF + ALFE = CB^2 + AC^2 \text{ das ist}$$

$$ABDE = CB^2 + AC^2 \text{ oder}$$

$$AB^2 = CB^2 + AC^2.$$

Wie man
durch Fülle
dieses Lehrsatzes
ein Quadrat in zwey,
und zwey in
eins leicht
verwandeln
konne;

Das ist nun der Beweis dieses wichtigen
Lehrsatzes, wodurch man in den Stand
gesetzt wird, sogleich ein Quadrat in zwey
andere, oder umgekehrt zwey in eins zu
verwandeln: denn wenn man auf der ge-
gebenen Seite des Quadrats ein rechte-
winklichtes Dreieck aufrichtet; so wer-
den

den die Quadrate der beeden Seiten dem gegebenen Quadrat gleich seyn. Eben so darf man nur die Seiten zweyer gegebenen Quadrate rechtwinklicht zusammen setzen, und hernach die Hypotenuse ziehen; so wird man die Seite desjenigen Quadrats finden, welches den beeden gegebenen gleich ist.

Will man ein Quadrat, das drey andern Quadraten gleich ist, so darf man nur die Operation doppelt machen. Z. E. in der 34. Fig. wenn CA und AB rechtwinklicht zusammengesetzt werden, so ist $CB^2 = CA^2 + AB^2$; und wenn ich auf CB die Linie DB abermal rechtwinklicht setze, so ist $CD^2 = CB^2 + BD^2$. Folglich $CD^2 = CA^2 + AB^2 + BD^2$. Eben so siehet man, daß man eine Menge von Quadraten durch die Wiederholung dieser Operation nach und nach in ein einiges verwandeln könne.

Auf gleiche Weise lassen sich 3, 4 und mehrere Quadrate in eines u. s. w. verwandeln.
Tab. II. Fig. 34.

§. 160. Diß ist aber noch das wenigste, was von der Fruchtbarkeit dieses Lehrsazes gesagt werden kann. Im folgenden werden sich ungleich wichtigere Wahrheiten daraus herleiten lassen. Gegenwärtig wollen wir nur zeigen, wie man durch Hülfe dieses Lehrsazes einen Theil vom Cirkel wirklich vollkommen quadriren könne. Hippocrates, ein verunglückter Kaufmann, hat sich zuletzt auf die Mathematik gelegt, und durch die Erfindung, die wir jezo beschreiben, seine Namen unverewiget.

Anderer noch weit wichtigere Folgen, welche aus diesem Lehrsatz fließen.

Tab. II. Fig. 35.

Die Erfindung des Hippocrates

beruhet dar-
auf, nach wel-
cher sich ein
Stück vom
Eirkel, wel-
ches lunula
Hippocratis
heißt, voll-
kommen qua-
driren läßt.

Beweis der
gemeldeten
Quadratur,
oder Ver-
wandlung ei-
nes Eirkel-
stücks in ein
geradelinich-
tes Dreyeck.

ewiget. Denn das vom Eirkel quadrirte
Theilgen, davon wir jeko reden, heißt
noch heut zu Tag Lunula Hippocratis.
Wenn man zween Eirkel beschreibet, da-
von der eine noch so groß als der andere
ist, so wird das Stück AFBE, welches
die Differenz zwischen der Hälfte und dem
vierten Theil der beeden Eirkel ist, der
halbe Mond des Hippocrates (Lunula Hip-
pocratis) genannt, weil es einem halben
Mond nicht unähnlich siehet. Man ziehe
den Diameter AD vom grossen Eirkel, den
wir C nennen wollen, und beschreibe den
kleinern Eirkel AFBA so, daß sein Dia-
meter AB der Seite des in den größern
Eirkel einzuschreibenden Quadrats gleich
werde; welches geometrisch geschehen kann.
§. 153. Man darf nur in den grossen
Eirkel ein Quadrat hineinschreiben, und
die Seite des Quadrats AB zum Diamo-
ter des kleinen Eirkels machen; so ist,
weil $AB=BD$, nach der Natur des Qua-
drats, $AD^2 = 2AB^2$ §. 159. folglich,
wenn der grosse Eirkel C und der kleine c
heisset, $C:c = AD^2 : AB^2$ §. 158.

$$= 2AB^2 : AB^2$$

$$\text{-----} : AB^2 \text{ §. 9.}$$

$$= 2 : 1.$$

Also der größere gerade noch einmal so
groß als der kleinere. Folglich wird die
Hälfte vom kleinen Eirkel gleich seyn dem
vierten Theil vom grossen: dann weil

$$C:c$$

$C:c = 2:1$ so ist

$$C = 2c$$

————— : 4 folglich

$$\frac{C}{4} = \frac{2c}{4} \text{ das ist}$$

$\frac{1}{4}C = \frac{1}{2}c$. Nun ist in der Figur

$AFBA = \frac{1}{2}c$, und der Quadrant

$AEBC = \frac{1}{4}C$. Folglich

$$AFBA = AEBC. \text{ Es ist ferner S. 9.}$$

$$AEBA = AEBA.$$

$$AFBA - AFBA = AEBC - AEBA. \text{ Nun ist}$$

$$\triangle ABC = AEBC - AEBA, \text{ Wie man aus der}$$

Figur nothwendig
einsieht.

Folglich

$$AFBA - AEBA = \triangle ABC. \text{ Das ist in der Figur}$$

$$AFBA - AEBA = AFBE, \text{ folglich}$$

$$AFBE = \triangle ABC.$$

Also läßt sich der Mond, wenn er gerade so ausseheth, vollkommen quadriren, weil man ihn in ein Dreyeck geometrisch verwandeln kann, ein Dreyeck sich aber vollkommen quadriren oder ausmessen läßt: denn Quadriren heißt nichts anders, als die Fläche einer Figur in ein Quadrat verwandeln. Dem ungeachtet hat man doch für die Quadratur des Cirkels noch nichts gewonnen, weil das mondförmige Stücklein in zweyerley Bogen von zween verschiedenen Cirkeln eingeschlossen ist. Denn man weiß nicht, der wievielte Theil das Stück AFBE von dem ganzen Cirkel seye. Hatte also Hippocrates das Stück AFBA

Was quadriren hier heißt: se i.
warum aber nichts desto-
weniger der Cirkel selbst durch Hülfse
der Hippos

eratischen
Erfindung
noch nicht
quadrirt
werden könne.

oder ein weit kleineres noch, wenn es nur unten durch eine Sehne oder gerade Linie geschlossen wäre, quadrirt; so würde man den ganzen Cirkel quadriren, und ihm die Quadratur desselben danken können. Die Hippocratische Erfindung ist also übrigens von keinem sonderlichen Nutzen. Weil sie aber viel wichtiges in sich begreift, so haben wir sie nicht ganz übergehen wollen.

Von der Nutzbarkeit des Pythagorischen Lehrsatzes bey dem Begriff der Aehnlichkeit, oder bey den Verhältnissen ähnlicher Figuren;

und zwar vornehmlich bey Erfindung der mittlern Proportionallinie zwischen zwey gegebenen Linien.

Tab. II.
Fig. 40.

Eine jede auf dem Durchmesser des Cirkels aufgerichtete und in der Peripherie sich endende Per-

§. 161. Die Nutzbarkeit des Pythagorischen Lehrsatzes wird sich vorzüglich beweisen, wenn wir den Begriff der Aehnlichkeit der geometrischen Figuren vollends erläutert haben werden. Wir können ihn aber, wie Euclides uns ditzfalls vorgegangen, auf den Begriff der Gleichheit reduciren. Wir wollen mit der manchen so schwer scheinenden Aufgabe, die mittlere Proportionallinie zwischen zwey gegebenen Linien zu suchen, den Anfang machen. Nach dem pythagorischen Lehrsatz ist in der 34. Fig.

$$EC^2 = ED^2 + DC^2 \quad \text{folglich, da}$$

$$DC^2 = DC^2$$

$$EC^2 - DC^2 = ED^2$$

Wenn nun EC gesetzt wird = r
CD = a
DE = x

so ist nach obigem Ausdruck $r^2 - a^2 = x^2$

$$\text{und } \sqrt{r^2 - a^2} = x = DE.$$

Da aber auch $AC = EC = r$, weil AC, EC und CB Radii sind, so wird $\sqrt{r^2 - a^2}$
AC

$AC - CD = r - a$ und $CB + CD = r + a$ pendicularlin
das ist, $AD = r - a$ und $DB = r + a$; pie ist die
wie die Figur von selbst ausweist. Nun mittlere Pro
ist $r^2 - a^2 = (r - a) \cdot (r + a)$ §. 60. portionall
folgl. ist $r - a : \sqrt{r^2 - a^2} = \sqrt{r^2 - a^2} : r + a$ 78. 80. nie zwischen
Das ist in der Figur $AD : DE = DE : DB$. den Segmen
Denn wenn ich die mittlere und äußerste ten des Dia
Glieder wiederum multiplicire, so habe eters, wel
 $(r - a) \cdot (r + a) = \sqrt{r^2 - a^2} \cdot \sqrt{r^2 + a^2}$ che sie ab
 $= r^2 - a^2$, weil eine jede Wurzel, mit schneidet;
sich selbst multiplicirt, ihr Quadrat giebt; wird um
so ist $\sqrt{4} \cdot \sqrt{4} = 4$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, ständig aus
 $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^2} = x^2$ u. s. w. Demnach ist die dem Pytha
Proportion richtig: $AD : DE = DE : DB$. gorischen
Wenn also auf dem Diameter eines Cir- Lehrsatz er
kels eine Perpendicularlinie bis an die Per- wiesen und
ipherie hin aufgerichtet wird, so wird sie erläutert.
allemal die mittlere Proportionallinie zwis- Grosse
schen den beiden durch sie gemachten Ab- Fruchtbar
schnitten oder Segmenten des Diameters, keit dieses
und zugleich die Quadratwurzel aus dem Satzes.
Product dieser zwey Segmenten seyn. Die- in der ganzen
ser Lehrsatz ist einer der allerfruchtbarsten Geometrie;
Sätze. wir wollen nur
in der ganzen Geometrie; wir wollen nur eines der leichtesten
eines der leichtesten und faßlichsten Exem- und faßlichsten
pel geben. Man weiß aus dem ersten Exem
Theil, wie schwer es seye, die Quadrat- pel geben.
wurzeln aus Irrationalgrößen zu finden, Man weiß aus dem ersten
und wie man aller Mühe ungeachtet doch Theil, wie schwer es seye,
nicht so weit durch die Approximation es die Quadrat-
bringen könne, daß man sagen dürfte, nun wurzeln aus
habe man die Wurzel ganz genau und rich- Irrationalgrößen zu finden,
tig. und wie man aller Mühe ungeachtet doch

Quadrat-
wurzeln auch
aus so ge-
nannten Ir-
rational-
größen geo-
metrisch und
aufs genaue-
ste in Linien
geben könne.

fig. Hingegen in der Geometrie lassen sich die Quadratwurzeln aus allen nur denkbaren Irrationalgrößen ausziehen. Denn man darf nur eine Zahl in zween Factores theilen, welches allemal geschehen kann, wenn der eine Factor Eins, und der andere die gegebene Zahl ist, und hernach die beede Factores durch Linien ausdrücken, deren Summe den Diameter des Circels bestimmen wird, wenn sie schnur gerade zusammen gesetzt werden. Die aus dem Punkt der Zusammensetzung bis an die Peripherie gezogene Perpendicularlinie wird die Quadratwurzel seyn. Z. E. $2 = 1 \cdot 2$, $3 = 1 \cdot 3$, $5 = 1 \cdot 5$ u. s. w. Wenn also $AD = 1$ und $DB = 2$, so ist $DE = \sqrt{2}$; ist $DB = 3$, so ist $DE = \sqrt{3}$; ist $DB = 5$, so ist $DE = \sqrt{5}$ u. s. w. Denn $AD : DE = DE : DB$

Erklärung
und Beweis.

das ist $1 : \sqrt{2} = \sqrt{2} : 2$

$1 : \sqrt{3} = \sqrt{3} : 3$

$1 : \sqrt{5} = \sqrt{5} : 5$ u. s. w.

Denn die Producte der mittlern und äußersten Glieder sind einander gleich.

Und $DE^2 = AD \cdot DB$ das ist

$$2 = 1 \cdot 2$$

$$\text{oder } 3 = 1 \cdot 3$$

$$\text{oder } 5 = 1 \cdot 5 \quad \text{folglich auch}$$

$\sqrt{DE^2} = DE = \sqrt{(AD \cdot DB)}$ das ist

$$\sqrt{2} = \sqrt{1 \cdot 2}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{1 \cdot 3}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{1 \cdot 5}.$$

Da

Da nun $\sqrt{DE^2} = DE$, folglich genau durch die Linie DE ausgedrückt wird, so sieht man, daß man eine jede Quadratwurzel geometrisch aufs genaueste finden könne. Weil ferner diese Eigenschaft allen Circeln gemein ist, daß die auf dem Diameter stehende und an der Peripherie sich endigende Winkel, rechte Winkel sind, so wird in einem jeden rechtwinklichten Dreieck, wenn von der Spitze des rechten Winkels E auf die Hypotenuse AD eine Perpendicularlinie EB herabgefället wird, die Verhältniß statt finden, welche heißt: $AB : BE = BE : BD$; dann man kann durch die drey Punkte A, E, D nicht nur bekannter massen einen Circelbogen überhaupt, sondern auch, weil bey E ein rechter Winkel, gerade einen solchen Circelbogen beschreiben, dessen Sehne AD der Diameter wird, folglich wird durch ein rechtwinklichtes Dreieck allemal ein halber Circel bestimmt, und die obige Proportion wird bey allen rechtwinklichten Dreiecken unter der gemeldten Bedingung, daß EB auf AD perpendicular gefället werde, statt finden.

In einem jeden rechtwinklichten Dreieck ist der von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällete Perpendikel die mittlere Proportionallinie zwischen den durch abgeschnittenen Segmenten der Hypotenuse.

Bestimmung der noch übrigen Fälle, bey der Aehnlichkeit der Dreiecke;

§. 162. Es sind noch zween Fälle übrig, welche die Proportionen der Linien in den geradlinichten Dreiecken bestimmen. Der Beweis davon wird sich leicht geben, wenn wir zuvor unsern Lesern gezeigt haben, daß zwey Parallelogramma sich zu einander verhalten wie ihre Grundlinien,

da dann vornehmlich gezeigt wird, daß alle Par-

allelogramma von glei-
 Tab. II.
 Fig. 36.
 chen Höhen
 sich verhal-
 ten wie die
 Grundlinien
 und umge-
 kehrt, wie die
 Höhen, wenn
 die Grundli-
 nien gleich
 sind.

wenn sie gleiche Höhe haben, oder
 wie ihre Höhen, wenn die Grundlini-
 en gleich sind. Das Rectangulum F A B E
 ist in seinem Inhalt A B . B E, und das
 Rectangulum E B C D ist B C . B E. Da
 man nun den Inhalt einer Fläche allemal
 für die Fläche selbst setzen darf, so ist

$$F A B E : E B C D = A B . B E : B C . B E ,$$

oder noch deutlicher

$$A B . B E : B C . B E = A B . B E : B C . B E$$

das ist nach

$$§. 80. nr. VI. A B . B E : B C . B E = A B : B C .$$

Da nun A B und B C die Grundlinien sind,
 so verhalten sich zwey Rectangula von glei-
 chen Höhen wie die Grundlinien. Wie
 sich aber die ganze Rectangula zu einander
 verhalten, so verhalten sich auch ihre Hälfs-
 ten; oder nach §. 80. nr. VI.

weil $A B . B E : B C . B E = A B : B E$. so ist

$$\text{auch } \frac{A B . B E}{2} : \frac{B C . B E}{2} = A B : B E .$$

Folglich sind
 alle Dreyecke
 von einerley
 Grundlinie
 wie ihre Hd-
 hen, und die
 von einerley
 Höhen, wie
 ihre Grund-
 linien.

Da nun diese Hälften rechtwinklichte Drens-
 ecke sind, so verhalten sich auch diese zu einan-
 der, wie ihre Grundlinien, wenn sie einer-
 ley Höhen haben. Und weil alle Parallelos-
 grammata in Rectangula verwandelt werden
 können, so ist die Verhältniß allgemein; da-
 her nicht nur alle Parallelogramma, son-
 dern auch ihre Hälften, das ist, alle nur
 mögliche geradelinichte Dreyecke sich ver-
 halten wie ihre Grundlinien, wenn sie einer-
 ley Höhe haben, und wie ihre Höhen, wenn
 sie einerley Grundlinien haben.

§. 163. Nun können wir leicht die Anwen-
 dung

dung auf die noch zween übrige Fälle der Proportionen bey den Dreneck machen. Man ziehe in einem Dreneck ACB mit der Grundlinie AB in einer beliebigen Zwischenweite die Parallellinie DE, und vereinige hernach die Punkte D und E wie auch E und A durch die Linie DB und AE, so werden sich zwey gleiche Drenecke DAE und DBE ergeben; weil sie einerley Grundlinie DE, und, da sie zwischen einerley Parallellinien stehen, auch einerley Höhe haben. §. 162. Folglich wird sich die Proportion von selbst geben:

$$\triangle CDE : \triangle ADE = CD : DA$$

$$\triangle CDE : \triangle \begin{cases} DEB \\ ADE \end{cases} = CE : EB$$

$$CD : DA = CE : EB.$$

Wenn man nun die Versetzungen und Veränderungen nach §. 80. hier anbringt, so giebt es folgende Proportionen, welche alle aus der schon gefundenen sich herleiten lassen. Denn wenn man die mittlere Glieder verwechselt, nach §. 80. nr. I. so hat man $CD \cdot CE = DA : EB$

ferner durch die Addition:

§. 80. nr. IV.

$$CD + DA : DA = CE + EB : EB \text{ das ist}$$

in der Figur: $CA : DA = CB : EB.$

und wiederum

$$\text{§. 80. nr. IV. } CD : CD + DA = CE : CE + EB, \text{ das ist}$$

in der Figur $CD : CA = CE : CB$; folglich

auch nach

$$\text{§. 80. nr. II. } CA : CD = CB : CE.$$

Wir zweiffeln keineswegs, daß unsere Leser diese Rechnung verstehen werden, wenn sie

Anwendung dieser Sätze auf die Proportion der Linien im ähnlichen Dreneck. Tab. II. fig. 37. 38. Erster Fall, die Proportion der Linien zu finden, ohne daß man den Begriff der Ähnlichkeit dazu nöthig hätte.

nur die Lehre von den Proportionen, welche, wie wir schon gesagt haben, gleichsam die Seele der mathematischen Wissenschaften ist, noch inne haben, oder wenigstens an dieselbe zurückdenken mögen.

Zweiter Fall,
die Propor-
tion der Li-
nien zu fin-
den.

Tab. II.
Fig. 38.

§. 164. Es ist noch ein Fall übrig, dessen Betrachtung uns zu einer neuen Gattung von Proportionen führen wird. Man nehme die Linie CA wiederum für die Grundlinie, und ziehe in Gedanken durch den Punkt B eine Parallellinie mit AC, so werden die Dreyecke DAB und CDB, einerley Höhe haben; folglich wird seyn:

$$\triangle DAB : \triangle CDB = DA : DC. \quad \S. 162.$$

$$\triangle DBE : \triangle CDE = DA : DC. \quad \S. 163.$$

(DAE

folglich

$$\triangle DAB : \triangle CDB = \triangle DBE : \triangle CDE \text{ und nach}$$

§. 80. nr. IV.

$$DAB + CDB : CDB = DBE + CDE : CDE; \text{ d. i.}$$

in der Figur:

$$\triangle CAB : \triangle CDB = \triangle CDB : \triangle CDE.$$

Nun ist

$$\triangle CAB : \triangle CDB = AB : DE$$

§. 162. folglich

$$\triangle CDB : \triangle CDE = AB : DE$$

und weil auch

$$\triangle CDB : \triangle CDE = CB : CE$$

§. 162. so ist

$$CB : CE = AB : DE$$

oder §. 80. nr. I.

$$CB : AB = CE : DE,$$

nr. II. §. 80.

$$CE : DE = CB : AB.$$

Eben so beweist man auch, daß

$$CD : DE = CA : AB.$$

Denn weil wir bereits bewiesen haben, daß

$$CB : CE = AB : DE$$

und

$$CB : CE = CA : CD$$

§. 163. so ist

$$CA : CD = AB : DE$$

oder §. 80.

$$CA : AB = CD : DE$$

und

und wenn man die Proportion umkehrt;
§. 80. nr. II.

$$CD : DE = CA : AB.$$

Doch man siehet von selbst leicht ein, daß alle §. 80. beschriebene Veränderungen hier vorkommen können; daher wir unsern Lesern das schon gesagte nicht zweimal sagen wollen. Uebrigens habe ich den bloß geometrischen Beweis schon in meinen Amoenit. Acad. Fasc. II. vorge-
tragen, und dafelbst gezeigt, daß es je und je für Anfänger besser und tauglicher seye, wenn man aus den angeführten Gründen den Beweis führet, als wenn man den Begriff der Aehnlichkeit allein zu Hülfe nimmt. Wir wollen aber jetzt die ganze Lehre auch aus der Natur der Aehnlichkeit erläutern.

§. 165. Man siehet leicht, daß die Tab. II. zwei Dreiecke CDE und CAB einander ähnlich seyen. Denn sie sind in nichts von einander unterschieden als in der Größe; und wenn ich das kleinere Dreieck CDE durch ein Vergrößerungsglas ansehe, so wird es nach und nach dem Dreieck CAB congruent erscheinen. §. 10. Nun fragt man billig: ob man keine nähere Gründe von der Aehnlichkeit der Dreiecke zu urtheilen, vorbringen könne? Denn das, was wir bisher sagten, ist eben nach dem Gesicht geschlossen; man siehet es ja, daß die zwei Dreiecke ein-
ander

Marum die gegebene Weise eine besondere und vorzügliche Deutlichkeit haben.

Wie man eben diese Proportionen aus dem Begriff der Aehnlichkeit herleiten könne; und was ähnliche Dreiecke seyen?

woraus man erkenne, daß ein Dreieck dem andern ähnlich seye?

ander ähnlich seyn. Warum sie aber einander ähnlich seyen, kann man seho noch nicht so deutlich wissen. Allein wenn wir bedenken, daß ein Dreyeck durch die Neigung seiner drey Seiten gegeneinander bestimmt werde, so gehet uns schon ein näheres Licht auf: denn wenn die Neigung der Seiten gegeneinander gleich ist, so werden die Dreyecke einander ähnlich seyn, ihre Seiten mögen groß oder klein werden, weil in diesem Fall nichts ausser der Größe gedacht werden kann, wodurch man zwey Dreyecke unterscheiden könnte. Das ist aber der Begriff der Aehnlichkeit. §. 10. folglich sind zwey Dreyecke einander ähnlich, wenn sie gleiche Winkel haben; und diese Gleichheit der Winkel folgt unmittelbar aus den bereits von uns erwiesenen Proportionen der Seiten. Denn weil die Linie DE mit AB parallel seyn muß, wenn die Proportionen statt haben sollen, so ist der Winkel $n = m$ und $r = s$, wie aus der Eigenschaft der Wechselwinkel erhellet, §. 146. Der Winkel o ist beyden Dreyecken gemeinschaftlich. Folglich sind alle drey Winkel einander gleich; ja man hat nicht einmal nöthig, von allen drey Winkeln diese Gleichheit zu beweisen: denn wenn nur zweyen Winkel in zweyen Dreyecken einander gleich sind, so muß der dritte in einem, auch dem dritten im andern Dreyeck

Zwey Dreyecke sind einander ähnlich, wenn sie gleiche Winkel haben:

Tab. II.
fig. 39.

Diese Eigenschaft der ähnlichen Dreyecke fließt aus dem obigen Beweis
§. 163.

Wenn in zwey Dreyecken nur zweyen Winkel einander

ed gleich seyn. Die Winkel seyen m und s in einem, und im andern Dreieck n und r , so wird der dritte Winkel, weil die Summe aller drey Winkel 180° macht, nothwendig seyn $= 180^\circ - (m + s)$ im einen, und im andern $= 180^\circ - (n + r)$. Diese zween Ausdrücke werden nun einander gleich seyn, wenn $r = s$ und $m = n$; folglich auch $r + n = s + m$: dann

ähnlich sind so sind die Dreiecke einander ähnlich, weil in diesem Fall der dritte Winkel vorhin dem dritten gleich seyn muß. Beweis.

$$180 = 180$$

$$r + n = s + m$$

$$180 - (r + n) = 180 - (s + m).$$

Das ist aber der dritte Winkel. Er wird also durch die Gleichheit zweyer Winkel von selbst bestimmt; und man kann sagen, daß, wenn zween Winkel in zween Dreiecken einander gleich sind, auch der dritte dem dritten gleich seye. Die Seiten, welche gleichen Winkeln entgegen gesetzt werden, sind hernach proportionell. Man heißt sie deswegen gleichnamigte Seiten, (latera homologa). Wenn man also von zween Dreiecken, sie mögen stehen, wo sie wollen, bewiesen hat, daß zween Winkel im einen zween im andern gleich seyen, so werden ihre Seiten alle diejenige Verhältnisse haben, die wir S. 163. 164. vorgetragen; folglich werden auch alle Veränderungen, davon wir S. 80. gehandelt haben, sich dabey anbringen lassen. Die ganze Kunst besteht darinn, daß

Was gleichnamigte Seiten und Winkel seyen,

und wie das
hero eine
gleichnamige Seite
proportionell
seye, welches
man bey Ge-
bung der Ver-
hältnisse
wohl zu mer-
ken hat.

daß man die erste Verhältniß recht setzet,
und allemal gleichnamigte Seiten in ei-
nem wie in dem andern Dreyeck einander
correspondiren läßt. Z. E. ich setze die
einfache Verhältniß $CD : CE$; was für
zwo Linien muß ich im größern Dreyeck
dazu nehmen, daß eine Proportion her-
auskommt? Weil CD dem Winkel r ent-
gegen steht, so wird die gleichnamigte
Seite CA heißen, als welche dem Wink-
el $s = r$ entgegen steht, folglich heißt das
dritte Glied CA ; und weil CE dem Wink-
el n entgegen steht, so heißt die gleich-
namigte Seite im großen Dreyeck CB ,
dann sie steht dem Winkel $m = n$ entgegen.
Eben so kann man zeigen, daß in der
Fig. 49. die drey Triangel oder Dreyecke
 AED , AEB , und BED einander ähnlich
seyen. Denn

$$\begin{array}{rcl} 0 + x & = & 90^\circ \\ m & = & 90^\circ \\ \hline 0 + x & = & m \end{array}$$

$r = r$ folglich, auch der dritten

das ist $0 = s$ dem dritten,

$$\triangle AED \sim \triangle AEB.$$

ferner weil $m = n$ wegen der Perpendicular-
linie EB

und $0 = s$ so ist auch der dritte Winkel
 $r = x$ dem dritten gleich, das ist

$$\begin{array}{rcl} \text{folglich} & \triangle AEB & \sim \triangle BED \\ \text{und weil} & \triangle AEB & \sim \triangle AED, \text{ so ist S. 9. auch} \\ & \triangle BED & \sim \triangle AED. \end{array}$$

Also

Tab. II.
Fig. 40.

Anwendung
der Sätze von
der Ähnlich-
keit auf die
oben S. 163.
bestimmte
Fälle;

Also sind alle drey einander ähnlich, und wo diese Aehnlichkeit statt findet, da sind die gleichnamigte Seiten proportionell. Anfänger können sich die Sache deutlicher machen, wenn sie von Chartenpapier oder Papendeckel solche Dreyecke, dergleichen in der 40. Figur stehen, ausschneiden, und sodann die gleiche Winkel auf einander legen; in welchem Fall sie den ganzen Beweis der Einbildungskraft vor die Augen hinhahlen, und ihre Figur auf die 39. und 38. Figur reduciren können. Uebrigens sieht man nun auch die Ursache ein, woher es komme, daß man zur Bestimmung eines Dreyecks allemal wenigstens eine Seite unter den drey bestimmenden Theilen nöthig habe, und warum die Aufgabe noch unbestimmt seye, wenn einem bloß drey Winkel gegeben werden. Denn aus drey gegebenen Winkeln, deren Summe zusammen gerade 180° machen muß, kann man eine Menge von Dreyecken machen, welche alle zwar einander ähnlich, nicht aber auch gleich, oder congruent, folglich noch unbestimmt sind.

Wie sich Anfänger die Sache noch deutlicher vorbilden können.

Warum aus drey gegebenen Winkeln kein Dreyeck vollkommen bestimmt werden könne, und man allemal wenigstens eine Seite dazu nöthig habe?

§. 166. Jetzt haben wir alles gesagt, was zur Theorie bey den Grundlinien der Regel und Flächen nebst ihren Verhältnissen gehört. Einige wenige Aufgaben dürfen wir nicht ganz mit Stillschweigen übergehen. Die leichteste ist die auf die Geometrie

Anwendung
Detti auf
Linien.

metrie

und wie man
aus drey ge-
gebenen Li-
nien die vier-
te Proportio-
nallinie finde.
Tab. II.
Fig. 39.

metrie angewandte Regel Petri. Denn man kann in der Geometrie aus drey gegebenen Linien die vierte so gut finden, als man in der Arithmetik aus drey Zahlen die vierte Proportionalzahl finden kann. Z. E. man solle zu den Linien CD, DE, und CA die vierte Proportionallinie finden. In diesem Fall darf man nur die Linie DE unter einem beliebigen Winkel auf CD setzen, sodann CD bis A verlängern, damit man CA bekomme; hernach mit DE aus dem Punkt A die Parallellinie AB ziehen, welche die durch die Punkte C und E zu ziehende Linie CB bestimmen wird. Denn es verhält sich ja

$$CD : DE = CA : AB;$$

folglich ist AB, wie in der Arithmetik,

$$= \frac{CA \cdot DE}{CD},$$
 d. i. wenn man das

Product der zweiten und dritten Linie mit der ersten dividirt, so hat man die vierte Proportionallinie. Diese Aufgabe kann man noch auf verschiedene Weise auflösen. Uns aber genüget, eine einige Methode für die Ausübung angeführt zu haben. Wie man die mittlere Proportionallinie finde, haben wir S. 161.

Wie man aus
dem bisher-
gen die Art
und Weise er-
lerne, einen
verjüngten

gezeigt. Eben so begreifen unsere Leser von selbst, wie man auch durch Hülfe ähnlicher Dreyecke einen sogenannten verjüngten Maasstab machen könne; weil er aber zur anwendenden Mathematik gehört,

gehört, so halten wir uns nicht weiter damit auf. Wer einmal einen gesehen hat, der wird sich leicht erinnern, daß durch die Parallellinien so viel ähnliche Dreyecke bey der ersten Abtheilung abgeschnitten werden, als Parallellinien gezogen wurden. Dahero sich die Zolle und Linien von selbst geben, wenn man eine Länge abmessen will. Will man eine geradelinichte Fläche ausmessen und in gleiche Theile eintheilen, so verwandelt man sie durch die zuziehende Diagonallinien zuerst in Dreyecke, die man ausmisst, und deren Summe dem ganzen Inhalt gleich ist; diesen Inhalt dividirt man mit der Zahl der Theile, in welche die Fläche getheilt werden solle, und sucht hernach aus dem Inhalt die Theile selbst, durch die Addition oder Subtraction eines Dreyecks zu dem ersten Dreyeck in der Figur; je nachdem es kleiner oder grösser ist, als der gesuchte Theil; und fährt so dann mit dieser Operation so lange fort, bis man die Theile alle bekommt. Will man eine Fläche auf dem Felde ins kleine bringen, so darf man nur einen Punkt C annehmen, und die Linien CD, CE, CF, CG, CH, ziehen; sodann nach Belieben, je nachdem man die Figur kleiner oder grösser haben will, die mit dem äussersten Umfang parallel zuziehende Linien de, ef, fg, gh, hd beschreiben; in

Maassstab zu machen, welches aber in die practische Geometrie gehört.

Wie allerhand Flächen im Felde vertheilt werden können.

Tab. III.
Fig. 41.

Wie man eine grössere Figur ins kleine bringen und vertheilen solle.

Wie hieraus
abermal ein
neuer Grund
erhelle, war-
um alle Cir-
kel einander
ähnlich, folg-
lich die Peris-
pherien ei-
nerley Ver-
hältnis zu ih-
ren Diams-
tern haben.
u. s. w.

Einige soge-
nannte alge-
braische, wie
wohl nicht
schwerere
Aufgaben,
als die bishe-
rige waren,
werden an-
geführt.

Wie man die
Seite des in
Tab. IV.
fig. 61.

den Cirkel
einzuschrei-

welchem Fall die Figur $defgh$ der größ-
fern $DEFGH$ vollkommen ähnlich seyn
wird, weil sich nach §. 164. verhalten
 $Cd:de = CD:DE$, $Ce:ef = CE:EF$; u. s. w.
Hieraus erhellet noch ein neuer Grund,
warum alle Cirkel einander ähnlich seyen.
Denn ich kann den Cirkel als ein Poly-
gon von unendlich viel Seiten betrachten.
Wenn ich nun aus dem Mittelpunkt C
an alle Ecke des Polygons Radios, und
mit den unendlich kleinen Seiten in belie-
biger Distanz Paralleseiten ziehe, so
wird die Summe aller dieser Seiten einen
Cirkel geben, welcher dem größern eben-
so gut ähnlich ist, als die Figur $defgh$
der Figur $DEFGH$ ähnlich ist.

§. 167. Weil wir oben versprochen
haben, auch noch zu zeigen, wie die Sei-
ten der regulären Polygone gefunden wer-
den, die sich in den Cirkel hineinschreiben
lassen; so wollen wir von dieser Mate-
rie noch etwas sagen. Das Sechse- und
Viereck wissen wir schon. Wie findet
man aber die übrigen? Wir versuchen es
zuerst mit der Seite des gleichseitigen
Dreuecks, welche man aus dem gegeben-
nen Radio oder der Seite des Sechsecks
findet. Es seye der Radius $DC = CB$
 $= DB = r$, so ist $DF = \frac{1}{2}r$, weil bey F
rechte Winkel sind, folglich durch die
Perpendicularlinie BF die Grundlinie DC
in dem gleichseitigen Dreueck in zween
glei-

gleiche Theile getheilet wird. Die gesuchte Seite des Dreiecks, nemlich die Seite AB sene x , so ist nach §. 151. $BF = \frac{1}{2}x$; weil bey F rechte Winkel sind, und die verlängerte Linie DC durch den Mittelpunkt des Eirkels geht. Da nun

$$DB^2 - DF^2 = FB^2 \quad \text{§. 160.}$$

$$\text{oder } r^2 - \frac{1}{4}r^2 = \frac{1}{4}x^2$$

$$\text{das ist } \frac{3}{4}r^2 = \frac{1}{4}x^2$$

so ist

$$3r^2 = x^2 \quad \text{folglich}$$

$$3r : x = x : r.$$

Demnach ist die gesuchte Seite des Dreiecks die mittlere Proportionallinie zwischen dem dreysfachen und einfachen Radius des Eirkels, welche sich nach §. 161. geometrisch finden läßt; oder auch $x = r \sqrt{3}$; in welchem letztern Fall man die Quadratwurzel aus dreyn durch die Approximation suchen, und sie hernach mit dem Radio multipliciren muß. Will man die Seite des regulairen Achtecks wissen, so darf man nur die Radios AC und CB unter einem rechten Winkel aus dem Mittelpunkt C ziehen, sodann die Punkte B und A, durch die Linie BA, welche die Seite des Vierecks ist, vereinigen, und endlich AB durch die Linie DC in zween gleiche Theile theilen, da dann DB die Seite des regulairen Achtecks seyn wird. Denn wenn wir $AC = BC$ wie oben x nennen; so ist

Tab. IV.
fig. 62.

ferner, wie man die Seite des regulairen Achtecks berechnen könne;

Ge 2

AB

$$AB = \sqrt{2r^2}$$

$$BE = \frac{1}{2}\sqrt{2r^2} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 2r^2} = \sqrt{\frac{2}{4}r^2} = \frac{1}{2}r$$

$$EC = \sqrt{(BC^2 - BE^2)} = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}r^2)} = \sqrt{\frac{3}{4}r^2}$$

$$DE = DC - EC = r - \sqrt{\frac{3}{4}r^2}, \text{ folglich}$$

$$DE^2 = r^2 - 2r\sqrt{\frac{3}{4}r^2} + \frac{3}{4}r^2 = \frac{7}{4}r^2 - 2r\sqrt{\frac{3}{4}r^2}$$

$$BE^2 = \frac{1}{4}r^2$$

$$DB^2 = DE^2 + BE^2 = \frac{7}{4}r^2 - 2r\sqrt{\frac{3}{4}r^2}$$

$$DB = \sqrt{\left(\frac{7}{4}r^2 - 2r\sqrt{\frac{3}{4}r^2}\right)}$$

Dieses ist die Seite des Achteckes. Auf gleiche Weise bemühet man sich, die Seiten der übrigen Polygone zu suchen; da es dann freylich oft beschwerliche Rechnungen geben muß. Wir halten aber unsere Leser nicht weiter damit auf, weil sie aus dem bisherigen schon den Schluß auf ähnliche Rechnungen machen können; und weil es überhaupt keine allgemeine Regel für die Polygone giebt, und die sogenannte Renaldinische Regel nach den von mehreren schon gegebenen Beweisen, eine wirklich falsche Regel ist.

§. 168. Wir wollen, ehe wir zur Stereometrie kommen, noch einige Aufgaben anführen. Die Alten haben sich auf die sogenannte lineam divinam nicht wenig eingebildet. Es ist daher der Mühe werth, daß wir sie erklären. Wenn man in einer gegebenen geraden Linie denjenigen Punkt findet, durch welchen die Linie so zerschnitten wird, daß das Quadrat des größern Stückes dem Product

aus

Was die sogenannte
linea divina
der Alten
seye, und wie
man sie aus

aus dem kleinern Stücke in die gegebene ganze Linie gleich ist, so hat man diese göttliche Linie erfunden. Es sene demnach die gegebene Linie AC, man verlangt den Punkt B zu wissen, damit hernach $BC^2 = AC \cdot AB$ werde. Die Linie AC wollen wir a nennen; BC die gesuchte Linie soll x heißen: folglich wird AB seyn $a - x$. Da nun seyn solle

$BC^2 = AC \cdot AB$, das ist
 $x^2 = a \cdot (a - x) = a^2 - ax$, so suchen wir x, und setzen nach der Bedingung

$$x^2 = a^2 - ax, \text{ folglich ist}$$

$$x^2 + ax = a^2 \quad \text{und weil}$$

$$\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 \text{ nach §.}$$

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2 \text{ folglich}$$

$$x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} \quad \text{und}$$

$$x = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a.$$

Wenn man nun $CE = AC$ rechtwinklicht auf AC setzt, und sodann $CD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a$ macht, so ist,

$$\begin{aligned} \text{weil } DE^2 &= CE^2 + CD^2 \\ &= a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2 \end{aligned}$$

$$DE = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}.$$

Beschreibet man nun mit DE aus dem Punkt D den Bogen EB, so ist

$$BD = DE = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

$$\text{und } BD - CD = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$$

Da nun $BD - CD = CB$, wie aus der Figur erhellet, so ist CB die gesuchte Linie,

Ec 3

und

den bisheris-
gen Lehrsätzen
suchen und
Tab. IV.
fig. 63.
bestimmen
können.

Von einigen andern Aufgaben, z. E. wie man aus der gegebenen Grundlinie und Innhalt eines rechtwinklichten Dreyscks seine Höhe finde, u. s. w.

und B der Punkt, in welchem die Linie geschnitten werden muß, wenn sie die verlangte Beschaffenheit haben solle. Es giebt noch verschiedene andere Aufgaben; z. E. man solle aus dem gegebenen Innhalt und der Grundlinie eines rechtwinklichten Dreyscks seine Höhe finden. Der Innhalt seye a^2 und die halbe Grundlinie b ; die ganze Kunst bestehet nummehr darinnen, daß man für den Innhalt einen andern Ausdruck findet, in welchem die Höhe, die wir y nennen wollen, angemerkt wird. Weil nun ein jedes Dreysck das halbe Product der Grundlinie in die Höhe zu seinem Innhalt hat; so wird auch

$$\begin{aligned} by &= a^2 \quad \text{und} \\ \hline &: b \\ y &= \frac{a^2}{b} \end{aligned}$$

Wenn man also den gegebenen Innhalt durch die halbe Grundlinie dividirt, so hat man die Höhe. Dergleichen Aufgaben giebt es die Menge, und es ist fein, wenn man seinen Wiß dabey übet; unsere Sache aber ist es dßmalen nicht, gegenwärtige Blätter mit vielen Aufgaben zu vermehren. Eine führen wir noch in Rücksicht auf die krumme Linien an; man verlangt

Eine Aufgabe in Rücksicht auf die

zu wissen: unter was für einem Winkel sich diejenige Circel schneiden, deren Diameter an ihren beeden Enden aufeinander perpendicular stehen? Wir werden bald hören, daß sie alle einander unter lauter rechten Winkeln schneiden; oder daß der Winkel $o + n$, unter welchem der Circel ADE den Circel ADF schneidet, allemal ein Winkel von 90° ist. Man ziehet nur aus den beederseitigen Mittelpunkten B und C die Radios BD und CD in den Punkt des Durchschnittes D; so hat man, weil $BD = BA$, und $CD = CA$, zwei gleichschenklige Dreiecke ABD und ACD, wenn nemlich die Linie AD gezogen wird. Demnach ist

$$x = o$$

$$x = n$$

$$x + y = o + n$$

$$x + y = 90^\circ \text{ nach der Bedingung, folglich}$$

$$o + n = 90^\circ.$$

Also schneiden sich alle mögliche Circel von dieser Gattung jedesmal unter einem rechten Winkel. Doch genug von diesem. Es ist die Körperlehre noch übrig, davon wir zum Beschluß dieses Capitels vollends reden müssen.

§. 169. Man kann nicht nur Linien und Flächen, sondern auch Körper ausmessen; und diese Kunst heißt man die Stereometrie, welche sich mit der Länge,

krumme Linien; nemlich unter was für einem Winkel diejenige Circel einander schneiden, deren Diameter aufeinander perpendicular stehen.

Tab. IV. fig. 64.

Vorbereitung zum Körpermaas oder zur Stereometrie.

440 Geom. I Cap. Von der dreysfachen

Breite und Höhe zugleich beschäftigt. Wie man zu dem Maas der Linien, Linien, und zu dem Maas der Flächen, Flächen gebraucht, so gebraucht man zu dem Maas der Körper wieder Körper. Es ist nur die Frage, was man für einen Körper, einen runden, oder eckigten u. s. w. dazu nehmen solle? Im folgenden werden wir hören, daß sich der viereckigte, welcher gleich lang, breit und hoch ist, am besten dazu schicke, wie man aus gleichem Grunde zu dem Flächenmaas das Quadrat erwählet hat. Ein solcher Körper heißt ein Cubus; ist er einen Schuh lang, breit und hoch, so heißt er ein Cubischuh; ist er aber nur einen Zoll lang, breit und hoch, so wird er ein Cubiczoll genannt; und wenn er endlich eine Ruthe lang, breit und hoch ist, so bekommt er den Namen einer Cubicruthe. Jetzt darf man billig fragen: wie sich dann Cubiczolle, Schuhe und Ruthen gegeneinander verhalten, oder wie viel Cubiczoll auf einen Cubischuh und wie viel Cubischuhe auf eine Cubicruthe gehen? Wir wollen umständlich darauf antworten, wenn wir gezeigt haben, wie man einen Cubus ausmesse. Die 42. Fig. zeigt einen vollkommenen Cubus. Seine Länge solle 3' seine Breite 3' und seine Höhe 3' seyn; folglich lassen sich auf die unterste Fläche 3 . 3 oder 9 Cubischuhe herum stellen

Warum sich der viereckigte Körper, welcher gleich lang, breit und hoch ist, das ist ein Cubus, am besten zum Körpermaas schicke,

was Cubiczolle, Schuhe und Ruthen seyen;

Wie man einen vollkommenen

Tab. III.
fig. 42.

nenen Cubus ausmesse;

len ; auf die zweite abermal 9, und auf die dritte noch einmal 9 ; das ist in allem 27. Wenn ich also die Länge dreymal mit sich selbst multiplicire, so bekomme ich den Inhalt des Cubus ; dann $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$. Nun ist eine Ruthe 10' lang, folglich wird der Inhalt einer Cubicruthe $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$ Cubic Schuhe betragen ; ein Schuh ist 10" lang, folglich ist der Inhalt eines Cubicshuhes $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$ Cubiczoll ; will man den Zoll noch in Linien theilen, so wird ein Cubiczoll 1000 Cubiclinien halten u. s. w. Hieraus siehet man schon, was die Cubicrechnung für eine Progression gebe, und daß man bey derselbigen allemal drey Zahlzeichen für den Zoll und eben so viel für die Schuhe abschneiden müsse, ehe man zu den Ruthen kommt ; wenn nemlich Zoll und Schuhe nebst den Ruthen vorhanden sind. Z. E. 6502846 Cubiczoll, sind $6^{\circ} 502' 846''$, oder 6 Cubicruthen, 502 Cubic Schuhe, 846 Cubiczolle. Die Ursache ist leicht zu begreifen. Denn weil erst 1000 Cubiczoll auf einen Cubic Schuh gehen, so gehört alles was unter 1000 ist, zu den Cubiczollen, und was über 1000 ist, zu den Cubicshuhen ; eben so verhält sichs mit den Cubicshuhen in Absicht auf die Ruthen.

Wie viel Cubiczoll auf einen Cubic Schuh, und wie viel Cubic Schuh auf eine Cubicruthe gehen,

und warum man bey dieser Rechnung je drey und drey Zahlen in geometrischen Maas für die Zolle, Schuhe u. s. w. abschneiden müsse.

Wie ein Körper, der nicht gleich lang, breit und hoch seye, genannt und ausgemessen werde.

Tab. III.
fig. 43.

§. 170. Wie wir nun nicht zweifeln, daß das bisherige unsern Lesern deutlich genug seye; so hoffen wir auch, daß das folgende ihnen faßlich seyn werde. Sie könnten vielleicht fragen: wie man einen Körper, dessen Breite, Länge und Höhen unterschieden seyen, ausmessen solle? Die 43. Figur stellet einen von dieser Gattung vor: Er soll 7' lang, 4 breit und 3 hoch seyn; man wird also auf die unterste Fläche $4 \cdot 7$ Cubicschuhe hinstellen können; auf die zweite wiederum so viel, und auf die dritte abermal so viel; folglich in allem $7 \cdot 4 \cdot 3$ Cubicschuhe; so bekommen wir seinen Inhalt. Er wird also gefunden, wenn man die Länge, Breite und Höhe mit einander multiplicirt. Einen solchen Körper heißt man ein Parallelepipedum. Ein jedes Parallelepipedum läßt sich durch die Diagonallinie in zween gleiche Theile theilen, wie aus der 43. Figur erhellet, in welcher die Linie CD das Parallelepipedum in zween gleiche Theile schneidet, deren Grundflächen Dreiecke sind; ihr Inhalt wird also die Hälfte von einem Parallelepipedo von gleicher Höhe und doppelter Grundfläche seyn. Ein solches halbirtes Parallelepipedum heißt nun ein dreneckiges Prisma. Es giebt aber noch andere eckigte Figuren in der Stereometrie, welche unter schiefen Winkeln zusammen stoßen, und worin

worinnen man die Cubischshuhe u. s. w. nicht
 so herum legen kann, wie in den beiden
 schon benannten Körpern; dahero fragt
 man billig, wie man denn dißfalls die
 Sache angreifen müsse? Wir helfen uns
 hier, wie in der Planimetrie, durch die
 Reduction, und verwandeln einen schief
 stehenden Körper in ein Parallelepipedum
 von gleicher Grundfläche und Höhe. Z.
 E. ein Körper, dessen beide Grundflächen
 Rhomboides sind, wird in ein Parallel-
 epipedum verwandelt, dessen beide, das
 ist, die obere und untere Grundflächen,
 rechtwinklichte Vierecke sind: denn wenn
 man von beiden Körpern so viel mit der
 Grundfläche parallele Scheiben schneidet,
 als möglich ist, so wird man aus keiner
 mehr schneiden können, als aus der an-
 dern. Da nun diese Scheiben nach den
 Grundsätzen der Planimetrie gleich sind,
 so werden auch ihre Summen gleich
 seyn. Dieses nun deutlicher und auf ei-
 ner andern Seite vorzutragen, müssen
 wir wissen, was ein Prisma ist. Wenn
 ein Vieleck oder Polygon sich selbst alles
 zeit parallel nach einer gewissen Richtung
 bewegt, so entsteht ein Prisma; oder ein
 Prisma ist ein Körper, dessen zwei Grund-
 flächen durch so viel Vierecke umschlossen
 werden, als die Grundflächen Seiten
 haben. Wenn demnach die Grundflä-
 chen Dreiecke sind, so wird der prismas-
 tische

tische Körper die Hälfte eines Parallelepiped von gleicher Höhe und doppelter Grundfläche seyn, folglich durch drey Parallelogramma umschlossen werden; sind es Vierecke, so wird er durch vier, und sind es Fünfecke, so wird er durch fünf Parallelogramma umschlossen; u. s. w. Da nun ein jedes Polygon durch Diagonallinien in Dreyecke eingetheilt werden kann, so werden sich alle Prismata in dreyeckigte Prismata zerschneiden lassen; folglich lassen sich alle Prismata wie das dreyeckigte, durch die Multiplication der Grundfläche in die Höhe ausmessen. Denn die Summe aller dreyeckigten Prismaten, aus welchen ein gegebenes vieleckigtes besteht, ist der Inhalt von dem gegebenen Prisma, das ist, das Product der ganzen Grundfläche in die Höhe; und weil die Höhe nach Perpendicularlinien abgemessen wird, so sieht man leicht, daß die Verwandlung angeht, und alle Prismata von einerley Grundflächen und Höhen, einander gleich seyen, folglich eines für das andere, was die Grösse des Inhalts betrifft, gesetzt werden könne. Da man nun ferner einen Cylinder, das ist, einen Körper, dessen beide Grundflächen Cirkel sind, und welcher durch die sich allzeit parallele Bewegung einer Cirkelfläche entstehet, als ein Prisma von unendlich viel unendlich

Wie
ein Cy-
linder
entste-
he.

Tab.
III.
Fig.
47.

werden könne. Da man nun ferner einen Cylinder, das ist, einen Körper, dessen beide Grundflächen Cirkel sind, und welcher durch die sich allzeit parallele Bewegung einer Cirkelfläche entstehet, als ein Prisma von unendlich viel unendlich

fleh

kleinen Seiten ansehen kann, so werden auch alle Cylinder nicht nur auf einerley Weise ausgemessen, sondern auch wenn sie von gleichen Grundlinien und Höhen sind, einander gleich seyn. Eben das müssen wir von den Pyramiden und conischen Körpern oder sogenannten Regeln sagen. Diese entstehen, wenn ein Dreyeck sich um seine Grundlinie herumbewegt, jene aber, wenn eine eckigte Grundfläche durch so viel oben zusammen gehende Dreyecke umschlossen wird, als die Grundfläche Seiten hat. Folglich kann auch ein conischer Körper als eine Pyramide betrachtet werden, deren Grundfläche unendlich viel unendlich kleine Seiten hat. Und weil eine jede Pyramide als der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundlinie und Höhe betrachtet werden kann, so wird der conische Körper oder der Regel ebenfalls der dritte Theil eines Cylinders von gleicher Höhe und Grundfläche seyn. Jenes kann man einem augenscheinlich beweisen, wenn man sich ein dreyeckiges Prisma von Holz machen läßt, und selbiges hernach wirklich durch die Diagonallinien schneidet, daß gerade drey Pyramiden heraus kommen, welche einerley Grundlinie und einerley Höhen haben, folglich alle einander gleich sind; dieses wird der Verstand aus der Aehnlichkeit schliessen, indem er ei-

Wie die Pyramiden und
Tab. Regel
III. oder
Fig. conische
45. Körper
46. per
47. entstehen.

Eine Pyramide ist der dritte Theil eines Prismas von gleicher Höhe und Grundfläche.

Eben so ist ein Conus

nen

der dritte
Theil eines
Cylinders
von gleicher
Höhe und
Grundfläche.

Was ein ab-
gekürzter
Conus seye,
und wie er
ausgemessen
werde.

nen jeden Kegel als eine Pyramide betrachten, daher er auch die Folge hinzudenken kann, daß er der dritte Theil vom Cylinder seye, wie die Pyramide der dritte Theil vom Prisma; welches letztere der Einbildungskraft gleichsam vor die Augen hingeschnitten, nicht aber so leicht hingemahlet werden kann. Da nun das Maas eines Prisma und eines Cylinders das Product der Grundfläche in die Höhe ist, so wird das Maas einer Pyramide und eines Kegels der dritte Theil von diesem Product, oder, welches gleichviel ist, das Product der Grundfläche in den dritten Theil der Höhe seyn. Weil es endlich auch abgekürzte Kegel giebt, dergleichen einen die 48. Fig. weiset, so wird man solche nicht weniger ausmessen können, wenn man nur bedenkt, daß der abgekürzte Kegel ADFH die Differenz zwischen dem grossen Kegel AEH und dem kleinen DEF, oder daß $ADFH = AEH - DEF$ seye. Woferne ich nun diese zwey Kegel aus den gegebenen Grundflächen und Höhe des abgekürzten Kegels finden kann, so kann ich den Inhalt des abgekürzten Kegels selbst bald finden. Das ist uns sehr leicht. Denn wenn man die Linie DB mit GC parallel zieht, so wird seyn

$$AB:BD = AC:CE.$$

AB ist die Differenz der halben Durchmesser

messer von den gegebenen beeden Grundflächen; BD die gegebene Höhe, und AC der halbe Durchmesser von der grössern Grundfläche; folglich ist CE die Höhe des ganzen Kegels in bekannten Grössen gefunden, nemlich $\frac{AC \cdot BD}{AB} = CE$, und weil

EG, die Höhe des kleinen Kegels = EC — GC, so ist auch diese bekannt. Weil man nun über diß die beede Grundflächen weiß, so darf man nur jede in dem dritten Theil ihrer correspondirenden Höhe multipliciren, und das kleinere Product vom grössern abziehen, so wird die Differenz der gesuchte Inhalt des abgekürzten Kegels seyn.

§. 171. Wir kommen nun auf die wichtige Frage von dem Inhalt einer vollkommenen Kugel oder Sphäre. Diese nun werden wir am besten auflösen können, wenn wir uns vorstellen, die Kugel entstehe durch die Bewegung oder Umwälzung eines halben Cirkels um seinen Diameter; der Cylinder aber durch die Bewegung oder Umwälzung eines Parallelogrammi um eine seiner Seiten; wie der Conus durch die Umwälzung eines Dreyecks auf gleiche Weise entsteht. Dieses vorausgesetzt, müssen wir uns zugleich erinnern, daß sich die Cirkelflächen wie die Quadrate ihrer Diameter verhalten; demnach werden auch zween Cylind-

Die Archimedeische Erfindung vom Inhalt der Kugel.

der

448 Geom. I Cap. Von der dreyfachen

der von gleicher Höhe sich wie die Quadrate ihrer Diameter verhalten. Denn der eine Cylinder solle C der andere c seyn, die beederseits gleiche Höhe aber a, und die Grundfläche von C solle B, die von c hingegen b heißen. So wird $C = Ba$ und $c = ba$, folglich

$$C : c = Ba : ba \quad \text{demnach}$$

$$\text{-----} : a$$

$$C : c = B : b$$

Weil nun die Grundflächen der Cylinder Eirkel sind, so verhalten sie sich wie die Quadrate ihrer Diameter, die wir D und d nennen wollen: demnach ist

$$D^2 : d^2 = B : b \quad \text{und}$$

$$\text{weil } C : c = B : b$$

$$\text{----- so ist}$$

$$C : c = D^2 : d^2$$

Die Cylinder von gleichen Höhen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Diameter.

das ist, die Cylinder von gleichen Höhen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Diameter, oder auch wie die Quadrate ihrer halben Diameter; dann ich darf nur mit 4 dividiren, so hat man $C : c = \frac{D^2}{4} : \frac{d^2}{4}$ das heißt, die Cylinder dieser Art verhalten sich, wie die Quadrate der halben Diameter. Wenn man nun wissen will, was das Maas der Kugel seye, so muß man sie mit einem Cylinder vergleichen, dessen Höhe der Diameter der Kugel, und dessen

sen Grundfläche ein Cirkel von gleichem Tab. III. Diameter ist. Die 48. Figur stellt ein solches Verhältniß vor. Denn $C D A B$ ist ein Quadrat, welches durch seine Umwälzung um CD einen Cylinder beschreibt, dessen Höhe $CD = CB$, der halbe Diameter der Grundfläche und zugleich der halbe Diameter der Kugel ist, welche durch die Umwälzung des Quadranten DGB um DC entsteht. Woferne man nun die Diagonallinie CA vollends zieht, so wird zu gleicher Zeit, wenn sich $DABC$ um DC , und DGB um DC wälzet, auch das Dreieck DAC um DC gewälzet werden, und durch diese Umwälzung einen Kegel beschreiben; folglich entsteht durch eine Umwälzung ein Cylinder, eine halbe Kugel und ein Kegel zugleich, welche alle einerley Höhen und Grundflächen haben. Nun ziehe man eine Parallellinie EH , und bemerke die Durchschnitte, welche sie mit der Diagonallinie und dem Cirkelbogen macht, durch Punkte, z. E. F und G ; so wird EF ein Durchschnitt vom Kegel, EG ein Durchschnitt von der Kugel und EH ein Durchschnitt vom Cylinder seyn. Wissen wir nun, wie sich diese drey Durchschnitte zu einander verhalten, so wissen wir auch, wie sich die Kugel und der Cylinder zu einander verhalten; weil wir einerley Verhältniß herausbringen werden, wir mögen

Die Verhältnisse der Kugel zum Cylinder von gleicher Höhe und Diameter.

fig. 48.

§ f

den

450 Geom. I Cap. Von der dreyfachen

Die Kugel
ist $\frac{2}{3}$ vom Cy-
linder, der
gleich hoch
und dick
mit ihr ist.

Erklärung
und Beweis
dieses Lehr-
satzes.

den Punkt E in der Linie DC annehmen, wo wir wollen. Nun ist EF der halbe Diameter eines Cirkels im Keg, EG der halbe Diameter eines Cirkels in der Kugel, und EH der halbe Diameter eines Cirkels in dem Cylinder; folglich werden sich alle diese Cirkel, oder alle diese Durchschnitte zu einander verhalten, wie die Quadrate ihrer halben Diameter, das ist, wie EF^2 , EG^2 und EH^2 . §. 157. Wenn wir nun bewiesen haben, wie diese Stücke gegen einander sich wirklich verhalten, so werden wir auch zugleich wissen, wie ihre Summen, oder alle mögliche Durchschnitte von dieser Art zusammen genommen, das ist der Keg, die Kugel und der Cylinder sich zu einander verhalten; weil das Ganze seinen Theilen zusammen genommen gleich ist. Dieses nun zu bewerkstelligen, muß man die Linie CG ziehen; welche als ein Radius den Linien CD und CB, und weil EH und CB parallel gezogen, auch EH gleich seyn wird. Nun ist aus dem Pythagorischen Lehrsatz bekannt, daß

$$CG^2 = CE^2 + EG^2$$

weil nun gleiches für
gleiches gesetzt wer-
den darf, und

$$CG^2 = EH^2$$

so ist auch

$$\underline{EH^2 = CE^2 + EG^2 \text{ nr. I.}}$$

Weil

Weil ferner $CD:DA=CE:EF$
und im Quadrat, $CD:DA=1:1$

$$\text{so ist } CE:EF=1:1$$

das ist, weil $1=1$, $CE=EF$, demnach .

$$CE^2=EF^2 \text{ nr. II.}$$

folglich dürfen wir für
 CE^2 in der obigen Glei-

chung nr. I. setzen EF^2 ;

dann weil

$$EH^2=CE^2+EG^2 \text{ nr. I.}$$

und

$$CE^2=EF^2$$

so ist

$$EH^2=EF^2+EG^2$$

$$EF^2=EF^2 \text{ subtr. §. 9.}$$

$$EH^2-EF^2=EG^2$$

folgl. auch die Sum. $EH^2=f.EF=f.EG^2$ nr. III.

das ist, Cylinder—Conus = Kugel.

Nun ist

$$\text{Conus} = \frac{1}{3} \text{Cylind.}$$

folglich

$$\text{Cylinder} - \frac{1}{3} \text{Cyl.} = \text{Kugel, das heißt}$$

$$\frac{2}{3} \text{Cylind.} - \frac{1}{3} \text{Cyl.} = \frac{2}{3} \text{Cylind.} = \text{Kugel.}$$

Denn es wird niemand befremden, daß wir nr. III. sagten, die Summe von allen EH^2 — die Summe von allen EF^2 sene der Summe aller EG^2 gleich; wer aber daran zweifelt, darf den Beweis nur etlich, 100 mal machen, oder etlich 100 Punkte in DC annehmen, so wird er sehen, daß allemal einerley herauskommt. Hernach bedenke man nur, daß die Summe aller Eirkelscheiben im Regel den Regel, und die Summe aller Eirkelscheiben in der Kugel

Warum der
gegebene Be-
weis richtig
und allge-
mein sene.

§ f 2

gel die Kugel, und die Summe aller Eirkelscheiben im Cylinder den Cylinder bestimmt; in welchem Fall man nicht umhin kann, auch zu sagen, daß die Summen der angeführten Quadrate ein gleiches Maas bestimmen, weil die angegebenen Eirkel sich alle wie die Quadrate ihrer Diameter verhalten, folglich diese für jene gesetzt werden können. Nun wird alles deutlich seyn; und der archimedeische Lehrsatz ist erwiesen, daß nemlich die Kugel allemal $\frac{2}{3}$ vom Cylinder seye, der einerley Höhe und Grundfläche oder Weite mit ihr hat. Diese Weite nun nennt man bey einer Kugel den größten Eirkel, dessen Durchmesser durch den Diameter der Kugel durchgeht. Denn bey einer Kugel giebt es allerhand eirkelförmige Durchschnitte, welche bald groß bald klein sind; gehen sie nun durch den Mittelpunkt der Kugel durch, so sind es die größte Durchschnitte der Kugel, und folglich auch die größte Eirkelflächen, die man aus der gegebenen Kugel schneiden kann. Archimedes, der Erfinder von dem angeführten Lehrsatz, daß nemlich die Kugel $\frac{2}{3}$ vom Cylinder gleicher Höhe und Grundfläche sey, war in diese seine Erfindung so verliebt, daß er die Figur davon auf sein Epitaphium zu stechen verordnet haben solle. Die Erfindung selbst ist in der That auch von grossem Gewichte

Was der
größte Eirkel
einer Kugel
seye;

te, und zeuget von einer nicht gemeinen Scharfsinnigkeit. Es lassen sich noch verschiedene Folgen daraus herleiten, die wir jezo vollends anführen wollen.

§. 172. Eine von den ersten Folgen ist diese, daß sich die Kugeln oder Sphären zu einander verhalten wie die Cubi ihrer Diameter. Denn wenn der Diameter 100' ist, so ist sein Cubus 100. 100. 100 = 1000000', und die Kugel wird seyn $\frac{2}{3}$ vom Cylinder, dessen Höhe 100' und dessen Grundfläche ein Cirkel ist, der zum Diameter auch 100' hat, wie aus §. 171. erhellet. Die Grundfläche wird also nach §. 156. seyn 314. 25 = 7850; und wenn man sie mit der Höhe = 100 multiplicirt, so wird 7850. 100 = 785000 der Inhalt des Cylinders seyn §. 170. Wenn ich nun dieses Product mit $\frac{2}{3}$ multiplicire, so habe ich den Inhalt der Kugel §. 171.

folglich ist $785000. \frac{2}{3} = 523333\frac{1}{3}$ der Inhalt der Kugel; demnach ist $\text{Cubus Diam: Sphär} = 1000000:523333\frac{1}{3}$ und weil eine Verhältniß mit einer dritten Zahl z. E. mit 3 multiplicirt einerley bleibt, so ist

$$\text{Cubus Diam: Sphär} = 3000000:1570000,$$

§f 3

das

Die Kugeln
verhalten
sich zu einan-
der wie die
Cubi ihrer
Diameter.

das ist, wenn die
Verhältniß mit
10000 dividirt
wird,

$$\text{Cubus Diam: Sphär} = 300 : 157.$$

Die ganze O-
berfläche der
Kugel ist der
viermal ge-
nommenen
Fläche des
größten Cir-
kels gleich.

Ein Ausdruck, den man, wenn man in der Uebung etwas thun will, auswendig lernen muß. Denn weil alle Kugeln eben so wohl als die Cirkel einander ähnlich sind, so ist die Verhältniß allgemein, und läßt sich auch auf alle Sphären oder Kugeln anwenden. Eine andere Folge ist nicht weniger wichtig. Sie bestehet darinnen, daß die Oberfläche einer Kugel dem viermal genommenen größten Cirkel der Kugel gleich sey. Denn ich kann die Kugel als eine Pyramide ansehen, deren Spitze in dem Mittelpunkt sich endiget, und deren Grundfläche die ganze Oberfläche der Kugel ist. Die Phantasie wird sich dieses vorstellen können, wenn sie nur die Kugel in Gedanken so auseinander legt, daß die in dem Mittelpunkt zusammen gehende Pyramiden von unendlich kleinen Grundflächen ihre Spitzen über sich kehren, und hernach in eine einige verwandelt werden, deren Grundfläche die Summe aller kleinen Grundflächen, und deren Höhe der Radius der Kugel ist. Ihr Inhalt wird also seyn die Grundfläche in den dritten Theil des Radius S. 170. oder in den sechs-

sechsten Theil des Diameters multiplicirt; Erklärung
das ist, das Product der ganzen Ober-
fläche der Kugel in den sechsten Theil ih-
res Diameters. Demnach wird es folgen-
de Rechnung geben, wenn wir den größ-
ten Cirkel circ. max. nennen: denn es ist

$$\text{Circ. max.} \times \text{diam} = \text{Cylind.} \quad \text{Folglich}$$

$$\frac{2}{3} \text{Circ. max} \times \text{diam} = \text{Cylind.}$$

$$\text{Kugel} = \frac{2}{3} \text{Cylind.} \quad \text{S. 171.}$$

$$\frac{2}{3} \text{Circ. max} \times \text{diam} = \text{Kugel.}$$

$$\frac{1}{6} \text{diam.} \times \text{Oberfläche der Kugel} = \text{Kugel.}$$

$$\frac{2}{3} \text{Circ. max} \times \text{diam} = \frac{1}{6} \text{diam.} \times \text{Oberfl. der Kugel.}$$

$$\frac{1}{3} \frac{2}{3} \text{Circ. max.} \times \text{diam.} = \text{diam.} \times \text{Oberflä- che der Kugel} : \text{diam.}$$

$$\frac{1}{3} \frac{2}{3} \text{Circ. max} = \text{Oberfläche der Kugel}$$

das ist, wenn
man wirklich

dividirt: $4 \text{Circ. max} = \text{Oberfl. der Kugel.}$

Da nun der größte Cirkel gefunden wird,
wenn man seine Peripherie mit dem vier-
ten Theil des Diameters multiplicirt, so
wird die ganze Oberfläche der Kugel ge-
funden, wenn man die Peripherie des
größten Cirkels mit dem ganzen Diams-
mer multiplicirt. Und wenn ich dieses
Product nochmalen mit dem sechsten Theil

Wie man aus dem gegebenen Diameter der Kugel ihre Oberfläche und ihren Inhalt finden könne;

und wie sich eine Kugel in einen Cylinder verwandeln lasse.

des Diameter multiplicire, so habe ich den cubischen Inhalt der ganzen Kugel. Man kann also aus dem gegebenen Diameter der Kugel sowohl ihre Oberfläche als ihren cubischen Inhalt finden. Wenn man also die Peripherie des größten Circels p und den Diameter d nennet, so ist die Kugeloberfläche allemal dp , und folglich der cubische Inhalt der Kugel selbst $dp \cdot \frac{1}{6}d = \frac{1}{6}d^2p$. Wenn ich nun diese Kugel in einen Cylinder verwandeln sollte, dessen Höhe mir gegeben und a genannt wird, so darf ich nur den Diameter des verlangten Cylinders suchen, welchen wir x nennen wollen; nun suchet man zuerst die Peripherie der Grundfläche des Cylinders, welcher, weil alle Peripherien des Circels zu ihren Diametern einerley Verhältniß haben, $\frac{px}{d}$ seyn wird. Indem $d : p = x : \frac{px}{d}$; folglich ist die Grundfläche selbst $\frac{px^2}{4d}$ und der körperliche Inhalt des Cylinders, welcher durch die Multiplication der Grundfläche in die Höhe a entstehet, $\frac{apx^2}{4d}$; demnach muß nach der Bedingung der Aufgabe seyn

$$\frac{1}{6}d^2p$$

$$\frac{1}{6}d^2p = \frac{apx^2}{4d}$$

$$\frac{4}{6}d^3p = apx^2 \cdot 4d$$

$$\frac{4}{6}d^3 = ax^2 \cdot p$$

$$\frac{4d^3}{6a} = x^2 \text{ oder}$$

$$\frac{2d^3}{3a} = x^2 \text{ folglich}$$

$$3a : 2d = d^2 : x^2$$

Dergleichen Aufgaben gibt es nun die Mens Wie man ei
 ge ; so kann man z. E. eine Kugel in ei ne Kugel in
 nen Conus, und einen Conus in eine Ku einen Conus
 gel verwandeln. Denn wenn die Grund und einen
 fläche eines Kegels $\frac{pd}{4}$ und seine Höhe a ist, Conus wie
 so wird der cubische Inhalt seyn, $\frac{adp}{12}$; derum in ei
 und wenn der Diameter der ihm gleich ne Kugel vers
 zu machenden Kugel x heißt, so ist ihr wandeln könn
 Inhalt $\frac{px^3}{6d}$; weil $d : p = x : \frac{px}{d}$ die Per ne u. s. w.
 ipherie des größten Circels ; welche mit
 dem Diameter x multiplicirt die Oberflä
 che der Kugel $\frac{px^2}{d}$ giebt, und diese mit dem
 sechsten Theil des Diameters x multipli
 cirt

eirt den cubischen Inhalt $\frac{px^3}{6d}$ Bestimmt.

Folglich muß nach der Bedingung des Problems seyn

$$\frac{1}{12} adp = \frac{px^3}{6d}$$

$$\frac{1}{12} ad^2 p = \frac{px^3}{6d} \cdot 6d$$

$$\frac{1}{12} ad^2 p = px^3 \quad \text{das ist}$$

$$\frac{1}{2} ad^2 p = px^3$$

$$\frac{1}{2} ad^2 = x^3 : p$$

$$\frac{1}{2} ad^2 = x^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} ad^2} = x$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} ad^2} = x.$$

Ob und war:
um man eine
Kugel nicht
auch in einen
vollkomme-
nen Cubus
verwandeln
könne?

Von dem Del-
phischen Pro-
blem einen
Cubus zu
verdoppeln;

S. 173. Fragt man aber, ob man eine Kugel nicht auch in einen vollkomme- nen Cubus verwandeln könne, so müssen wir mit nein antworten: dann die Cubatur der Kugel ist bis jetzt noch so wenig erfunden worden, als die Quadratur des Circels. Hingegen das Delphische Problem, welches die Messküßler des alten Athens so lange Zeit vergebens gesucht haben, ist aus dem bisherigen leicht aufzulösen. Der heidnische Apollo wurde um Abwendung der Pest von den Atheniensen angerufen; Er versprach zu helfen, wofern man seinen Altar zu Delphi, welcher ein vollkommener Cubus war, verdoppeln oder einen neuen Altar machen würde, der gerade noch einmal so groß, und doch wie der vorige abermal ein voll-
kom-

Kommener Cubus wäre. Dieses Pro-
 plem gab nun Griechenland allen seinen
 Weisen auf; vermuthlich steckten es die
 Messkünster selbst hinter die Delphische
 Priester, damit der Ausspruch des Apol-
 lo alle Gelehrten in der Welt dazu aufmun-
 tern möchte. Man wollte die Sache mit
 einer geometrischen Zuverlässigkeit und Wie und
 nicht mechanisch ausmachen; da es aber warum diese
 den meisten zu schwer fiel, so blieb das Aufgaben
 Problem lange unaufgelöst. Eratosthe- von Erfin-
 nes ein Bibliothecarius zu Alexandrien, und dung zweer
 der berühmte Hippocrates, von dem wir mittlern Pro-
 ein quadrirtes Stück des Circels haben, portionalli-
 verfielen zuerst auf die Gedanken, daß nen abhän-
 das Problem von der Erfindung zweer ge;
 mittleren Proportionallinien zwischen zwei
 gegebenen Zahlen abhänge. Das wollen
 wir jetzt beweisen. Es seyen zween Cu-
 bi, davon der eine B nochmalen so groß
 seyn solle, als der erstere, den wir A nen-
 nen. Die Seite des Cubus A heisset man
 a, demnach wird der Inhalt a^3 seyn; die
 Seite des Cubus B sey x, so wird sein
 Inhalt x^3 seyn. Da nun B nochmalen
 so groß als A, so wird nach der Bedin- Auflösung
 gung des Problems seyn und Beweis

$$x^3 = 2a^3 \text{ folglich}$$

$$x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$$

Daß nun $a\sqrt[3]{2}$ nichts anders seye, als des Delphi-
schen Pro-
blems von
die

Verdopp-
lung des Cu-
bus.

die erstere oder kleinere von zwey mittleren Proportionalzahlen zwischen a und $2a$, wird sich leicht zeigen. Denn es seye die erste mittlere Proportionalzahl x und die andere y , so ist $a : x = y : 2a$, demnach weil die Proportion continuirlich ist, hat man
nr. I. $a : x = x : y$ und $x : y = y : 2a$

$$\frac{ay}{x^2} = 1$$

$$2ax = y^2 \text{ nr. II.}$$

$$y = \frac{x^2}{a}$$

$$y^2 = \frac{x^4}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{x^4} = \frac{2ax}{a^2} \text{ nr. II. folglich §. 9.}$$

$$\frac{1}{a} = 2ax$$

$$\frac{1}{a^2} = 2ax$$

$$x^4 = 2a^3x$$

$$\frac{1}{a^3} = 2x$$

$$x^3 = 2a^3$$

$$\frac{1}{a^3} = 2x$$

$x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$; dieses aber ist die Seite des doppelten Cubus; dahero ist sie auch die erstere mittlere Proportionalzahl von den zwey gesuchten mittleren Proportionalzahlen zwischen a und $2a$, oder zwischen der einfachen und doppelten Seite des erstern Cubus A .

§. 174. Wir müssen auch was von Was man un-
den sogenannten regulären geometrischen ter den regu-
Körpern sagen. Zu dem Ende bestimmen lairen geo-
wir vorher den Begriff eines körperli- metrischen
chen Winkels. Wenn drey oder mehr Körpern vers-
Flächen in einem Punkt unter einer ge- stehe,
wissen Neigung zusammen stoßen, so heißt man den daraus entstehenden Winkel ei-
nen körperlichen Winkel. Ein solcher und was ein
Winkel kann niemalsen völlig 360° halten, körperlicher
sonst wäre es kein Winkel, sondern wür- Winkel seye;
de in eine Breite und ebene Fläche fallen.
Er muß demnach allemal weniger als
 360° in sich begreifen. Da nun ein re-
gulärer geometrischer Körper derjenige
ist, der entweder in lauter gleichseitige
Dreiecke, oder Vierecke oder überhaupt
Vielecke eingeschlossen ist; so fragt man
billig, wie viel es solche reguläre geome-
trische Körper gebe? Wir werden bald wie vieles re-
hören, daß es deren nicht weiter als fünf gulaire geo-
fe giebt: denn ein körperlicher Winkel metrische
muß kleiner als 360° seyn. Da man Körper gebe,
nun wenigstens drey Flächen zu einem
körperlichen Winkel braucht, so wollen
wir den Anfang mit dem gleichseitigen
Dreieck machen, und sehen, wie viel re-
guläre Körper durch Dreiecke entstehen
können. Der Winkel im gleichseitigen
Dreieck ist 60° ; folglich wird man drey
Körper durch dergleichen Dreiecke auf-
bauen können: denn

462 Geom. I Cap. Von der dreyfachen

und warum
man deren
nicht weiter
als fünfe
zählen könne?

$3 \cdot 60 = 180^\circ$ und giebt den Winkel des Tetraedri;
 $4 \cdot 60 = 240^\circ$ und giebt den Winkel des Octoedri;
 $5 \cdot 60 = 300^\circ$ und giebt den Winkel des Icosaedri;
 $6 \cdot 60 = 360^\circ$ ist schon zu groß, und giebt eine Fläche und keinen körperlichen Winkel mehr.

Ferner der Winkel im Quadrat ist 90° ; da nun

$3 \cdot 90 = 270^\circ$, so bekommt man den Winkel des Hexaedri oder Cubi;

$4 \cdot 90 = 360^\circ$ ist schon zu groß, und giebt keinen körperlichen Winkel mehr, daher aus dem Quadrat nur ein einiger regulärer Körper sich bauen läßt. Der Winkel im Fünfeck hält 108° ; wir wollen sehen, ob dieser zu einem körperlichen Winkel der regulären Körper was be trägt? wenn er mit 3 multiplicirt noch kleiner ist als 360° , so wird er dazu sich schicken. Die Sache verhält sich auch wirklich also, dann

$3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$, und giebt den körperlichen Winkel des sogenannten Dodecaedri.

Hingegen $4 \cdot 108 = 432$ ist schon um vieles zu groß, und giebt keinen körperlichen Winkel mehr. Eben so wenig geht es mit dem Sechseck an, denn sein Polygon

gonwinkel ist 120° , und $3 \cdot 120$ ist schon 360° ; folglich giebt das Sechseck keinen regulären Körper, und noch vielweniger das Siebeneck, u. s. w. weil sein Winkel noch grösser ist. Die reguläre Körper sind also fünf; nemlich drey lassen sich aus dem Dreieck, einer aus dem Viereck, und einer aus dem Fünfeck erbauen. Hingegen irreguläre Körper giebt es die Menge. Wann sie gar nichts reguläres an sich haben, und man will sie doch messen, so kann man ihren Inhalt einiger massen finden, wenn man einen Eubus mit Wasser füllt, und bemerkt, wie hoch das Wasser darinnen steht, sodann den irregulären Körper hinein legt, und abermal die Höhe des aus der Stelle getriebenen und empor gestiegenen Wassers beobachtet. Die Differenz der beeden Höhen wird den Inhalt des Körpers bestimmen. Diß aber ist praktisch. Man begreift von selbst, daß man ein anders Mittel ausfinden müsse, wenn man den Körper nicht naß machen darf; dahero einige auch Sand angerathen haben. u. s. w. Alles dieses gehört in die praktische Geometrie, mit deren wir uns diesmal nicht beschäftigen. Da wir nun in der Theorie nichts vergessen oder zurückgelassen, so eilen wir jezo zum folgenden, und werden nunmehr auch die Grundsätze der Trigonometrie vortragen.

Kurze Anzei-
ge, wie man
ganz irregu-
laire Körper
praktisch
ausmessen,
und ihren
Inhalt fin-
den könne.

Zweytes Capitel.

Von Ausmessung der Dreyecke
insbesondere, oder von der
ebenen Trigonometrie.

§. 175.

Warum man
von den
Dreyecken
und deren
Maas noch
besonders
handle.

Die Lehre von den Dreyecken ist so fruchtbar, daß sie noch einen besondern Theil der geometrischen Wissenschaften ausmachen kann. Wir haben zwar in dem vorigen Capitel schon gezeigt, wie man ihre Flächen genau ausmessen, und auch den Umfang finden könne, wenn einem der Inhalt nebst der Grundlinie und Höhe gegeben ist. Allein es giebt oft Dreyecke, davon wir nichts als etwa eine Linie und ein paar Winkel wissen u. s. w. Dahero in allem weg nöthig ist, daß wir auch zeigen, wie man disfalls die übrige Linien der Dreyecke finden könne. Die Wichtigkeit dieser Lehre erhellet unter anderm auch daraus, weil man nicht um alle Dreyecke, die man messen will, herumgehen kann, indeme manche sich oft an dem entferntesten Fixstern endigen, und zur Grundlinie den Diameter der ganzen Erdbahn haben. Da wir nun die Art und Weise, wie man

man auch die unbekannte Theile solcher grossen Dreyecke aus einigen bekannten Theilen finden solle, noch nicht umständlich vorgetragen, und es doch der Mühe werth ist, daß man so grosse und unzugängliche Zwischenweiten, z. E. von der Erde bis an die Sonne, oder an die noch weiter abstehende Sterne, u. s. w. zu bestimmen wisse; so werden unsere Leser schon jezo vorläufig von dem Nutzen derjenigen Wissenschaft überzeugt werden, deren Anfangsgründe wir gegenwärtig vortragen. Sie heisst mit einem Wort die Trigonometrie oder die Kunst Dreyecke auszumessen, und lehret uns, wie man aus drey gegebenen Theilen eines Dreyecks, worunter aber allemal wenigstens eine Seite seyn muß, die übrigen drey Theile finden solle. Diese Erklärung wird man leicht begreifen. Denn ein jedes Dreyeck hat drey Seiten und drey Winkel; drey Winkel nun bestimmen ein Dreyeck noch nicht. §. 165. Folglich würde die Aufgabe, aus drey gegebenen Winkeln das Dreyeck selbst zu finden, eine unbestimmte Aufgabe seyn. §. 127. Da aber entweder drey Seiten, oder zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel, oder eine Seite und zweyen Winkel ein Dreyeck bestimmen, §. 144. so sieht man schon, woher es komme, daß wir sagen, aus drey gegebenen Stücken könne

Vorläufige Anzeige von dem Nutzen dieser Lehre; Erklärung der Trigonometrie; Warum unter den drey gegebenen Stücken eines Dreyecks allemal eine Seite seyn müsse;

Gg man

man die übrige finden , und unter diesen Stücken müsse nothwendig eine Seite gegeben werden. Da nun ferner die Dreiecke entweder geradlinicht. oder krummlinicht sind , so theilet sich die Trigonometrie von selbst in zween Theile , davon der eine die geradelinichte , der andere aber die krummlinichte und vorzüglich die sphärische Trigonometrie in sich begreift. Weil aber die letztere nur in der Astronomie gebraucht wird , folglich als ein Theil der Astronomie angesehen werden kann , so dürfen wir uns mit einer umständlichen Erklärung derselben nicht beschäftigen ; wenn man nur , wie aus der 56. Fig. erhellet , überhaupt einen Begriff von sphärischen Dreiecken , deren Seiten Cirkelbögen sind , sich bilden kann. Dann daß sie nach andern Regeln als die geradelinichte Dreiecke , sich richten , wird in der Astronomie erwiesen. So halten z. E. in einem jeden sphärischen Dreieck. alle drey Winkel zusammen mehr als 180° , und können daher nicht nur zwey , sondern auch drey rechte ja gar stumpfe Winkel hie statt haben u. s. w. Dieses aber gehört nicht hieher. Die geradelinichte Trigonometrie breitet ihren Nutzen nicht blos über die astronomische , sondern über alle nur mögliche mathematische Wissenschaften aus. Darum verdienet sie in der Lehre von den ersten

Es giebt eine geradelinichte und krummlinichte Trigonometrie.

Kurze Anzeige von der letztern oder sphärischen Trigonometrie,

Tab. III.
Fig. 56.

Warum man vorzüglich die geradelinichte Trigonometrie abhandle und die krummlinichte hie übergehe.

sten Gründen aller mathematischen Wissenschaften einen vorzüglichen Platz.

§. 176. Wenn man von dem einen Schenkel EC eines Winkels ECA, auf dem andern Schenkel AC einen Perpendikel ED herunter fällt, so heißt dieser Perpendikel ED der Sinus des Winkels ECA und auch der Sinus des Bogens EA. - Beschreibt man nun um einen solchen Winkel aus der Spitze C, die man zum Mittelpunkt annimmt, einen Kreis, so wird man neben dem Sinus DE noch andere Linien ziehen können, welche in der Trigonometrie ihre eigene Namen haben. Der Sinus ED selbst kann noch auf einer andern Seite betrachtet werden: dann weil er auf AC perpendicular steht, so wird er die Hälfte von der verlängerten Sehne GE seyn; und weil sich in dem Nebenwinkel ECF keine Perpendicular-Linie von einem Schenkel zum andern ziehen läßt, als eben die auf den nach A verlängerten Schenkel CF herabgezogene Linie ED, so wird sie auch der Sinus des Nebenwinkels ECF, folglich des Bogens EF seyn. Also ist der Sinus eines jeden spitzen Winkels auch der Sinus des stumpfen Nebenwinkels. Weil ferner die Schenkel eines rechten Winkels auf einander perpendicular stehen, so wird der Sinus des rechten Winkels mit dem einen oder dem andern Schenkel selbst zusam-

Tab. III.

fig. 49.

Erläuterung der in der Trigonometrie vorkommenden Namen,

was der Sinus sey,

und wie man

Tab. III.

fig. 50.

ihn auf einer

doppelten

Seite betrachten

könne,

der Sinus des spitzen Winkels ist auch der Sinus des stumpfen Nebenwinkels;

Der Sinus
des rechten
Winkels ist
der Radius,
der deswegen
Sinus totus
heißt.

men fallen, folglich im Cirkel der Radius seyn; daher ist CR, der Radius, zugleich der Sinus des rechten Winkels ACR, und heißt deswegen der Sinus totus, ein Name, den man sich vorzüglich bekannt machen muß. Endlich erhellet auch noch dieses, daß ein jeder Sinus die Hälfte derjenigen Sehne sey, welche dem doppelten Winkel am Mittelpunkt entgegen steht; daher ist der Sinus totus die Hälfte der größten Sehne, nemlich des Diameters.

Was die
Tangenten
seyn,

Tab. III.
Fig. 50.

Die Tangen-
te von 45°
ist dem Ra-
dius, oder
dem Sinus
totus gleich.

§. 177. Wenn man an dem Ende des Radius AC eine Perpendicularlinie aufrichtet, oder überhaupt in dem Punkt A eine Parallellinie mit dem Sinus DE zieht, so heißt die Linie AH, welche von dem nach H verlängerten Schenkel CE durchschnitten wird, die Tangente des Bogens AE und folglich auch des Winkels ACE; welchen Namen man abermal sich wohl bekannt machen muß, wenn man in der Trigonometrie einen guten Fortgang bekommen will. Hieraus siehet man nun sogleich, daß die Tangente von 45° dem Sinus totus gleich seyn müsse. Denn weil bey A allemal ein rechter Winkel ist, so ist, wenn der Winkel $ACH = 45^\circ$, auch der Winkel $AHC = 45^\circ$, §. 147. folglich AHC ein gleichschenklisches Dreieck §. 145. und daher in diesem Fall $AH = AC$, oder dem

dem Radius, welcher allemal der Sinus totus ist. Es sind noch einige Linien, die man sich bekannt machen kann, wiewohl sie nicht so wichtig sind, als die beede schon erklärte Linien. Wir wollen daher nur kürzlich ihre Namen nennen.

Die Linie HC, wodurch die Tangente in H durchschnitten und bestimmt wird, heißt die Secante (Secans); die Linie AD, der Sinus versus, die Linie DC = EK der Cosinus; SR die Cotangente (Cotangens) und CS die Cosecante; (Cosecans.)

Unter diesen Linien ist vornemlich der Cosinus noch zu behalten, welcher durch den Sinus ED bestimmt und abgeschnitten wird; so ist in der 49. Fig. DC der Cosinus des Winkels ECA, wie es in der 50. Fig. DC vom Winkel DCE ist. Die Ursache, warum man diesen noch wissen muß, ist leicht begreiflich. Der Cosinus ist allemal der Sinus desjenigen Winkels, der mit dem gegebenen Winkel zusammen genommen 90° oder den Quadranten AER ausmacht, daher er auch der Sinus complementi heißt: denn $ECA + ECR = ACR$. Da man nun aus dem gegebenen Sinus den Cosinus finden kann, wie wir sogleich zeigen werden, so darf man die Sinus nur bis auf 45° suchen, weil alle Sinus der Winkel, die über 45° halten, Cosinus derjenigen Winkel sind, die unter 45° sind. So ist der Sinus

Die Namen Secante, Sinus versus, Cosinus und Cotangens werden erklärt.

Warum man die Erklärung des Cosinus besonders zu merken habe.

Warum man die Sinus nur bis auf 45° suchen dürfe, und wie die übrigen durch die

470 Geom. II Cap. Von Ausmessung

Cosinus bestimmt werden.

von 46° der Cosinus des Winkels von 44° , der Sinus von 60° ist der Cosinus des Winkels von 30° , der Sinus von 89° ist der Cosinus des Winkels von 1° u. s. w.

Warum man die Art und Weise, die Sinus zu berechnen, nicht weitläufig vortrage.

Kurze Anzeige, wie die Sinus u. s. w. berechnet werden.

§. 178. Nun hat man die Sinus von allen Graden nicht nur, sondern auch von den Minuten u. s. w. längstens berechnet; und diese mühsame Arbeit ist, um einen wohlfeilen Preis gedruckt, zu haben. Wir werden daher die Art und Weise der Berechnung selbst nicht weitläufig vortragen. Doch ist nöthig, daß wir unsern Lesern einen Begriff von der Arbeit derjenigen geben, welche Jahr und Tage hindurch fast nichts anders thun mußten, als Sinus, Cosinus, Tangenten und Secanten berechnen. Man hat den Sinus totus 10000000 Theilgen groß angenommen, und gesucht, wie viel von diesen Theilen auf einen Sinus von so und so viel Graden, Minuten, Secunden u. s. w. gehen. Damit man nun die Sache so richtig berechnen konnte, als möglich war: so dachte man, die Seite des Sechsecks ist dem Radius gleich, und weil der Radius der Sinus totus ist, so ist sie auch diesem gleich. Da nun eine dieser Seiten als eine Sehne angesehen werden kann, und eine jede Sehne ein doppelter Sinus ist; so fand man leicht, daß der Sinus von 30° , oder der Hälfte des der Sehne am Mittelpunkt entgegen stehen.

Der Sinus von 30° ist die Hälfte des Sinus totus.

stehenden Winkels, die Hälfte des Sinus totus seye. Aus diesem gefundenen Sinus, der $\frac{10000000}{2} = 5000000$ ist,

hat man dann den Sinus des halben und des doppelten Winkels u. s. w. gesucht, da Wie der Sinus sich immer neue Vortheile ergaben. Der Sinus von 45° wurde auf eine ähnliche Weise gefunden. Man zog die Sehne RF, welche nach den Lehrsätzen des vorigen Capitels §. 161. nichts anders ist als $\sqrt{RC^2 + CF^2}$; oder weil $RC = CF$, indem es Radii sind, $\sqrt{2}RC$, das ist, die Quadratwurzel aus dem doppelten Quadrat des Sinus totus. Diese zog man aus, und halbirte sie, daher man den Sinus von 45° bekam, welcher der halben Sehne RF nach §. 176. gleich seyn muß. Den Cosinus z. E. DC fand man aus dem gegebenen Sinus ED, indem man sagte $EC^2 - ED^2 = DC^2$ folglich $DC = \sqrt{EC^2 - ED^2}$. Man quadrirte also den Sinus totus, und subtrahirte das Quadrat des gegebenen Sinus davon, sodann zog man aus dem Rest die Quadratwurzel aus u. s. w. Aus dem Sinus und Cosinus fand man die Tangenten, weil $CD:DE = CA:AH$, daher die Tangente $AH = \frac{DE \cdot CA}{CD}$

Wie der Sinus von 45° gefunden werde.

Tab. III. fig. 50.

Kurze Regel aus dem gegebenen Sinus den Cosinus zu finden,

wie auch hernach die Tangenten,

$$= \frac{\text{sin. tot.} \times \text{sin.}}{\text{Cosin.}} \text{ u. s. w. Auf eine ähns}$$

und Secan-
ten u. s. w.

liche Weise ergab sich die Secante CH, indem man sagte $CD:CE=CA:CH$, folglich, weil $CE=CA$, die Secante $CH = \frac{CA^2}{CD} = \frac{(\sin \text{ tot.})^2}{\text{Cos.}}$ u. s. w.

Doch genug von diesem; unsere Leser sehen schon, wie mühsam diese Arbeit ist, unerachtet man übrigens nicht viel Nachsinnen dazu braucht.

§. 179. Es ist hierinnen, wie mit den Logarithmen, durch die gedruckte Tabulas Sinuum und Tangentium schon längstens allen denjenigen vorgeschaft worden, welche in der praktischen Trigonometrie sich üben wollen; daher wir weiter nichts hinzusetzen, als daß wir nur noch zeigen, wie man den Sinus des doppelten, dreysfachen, vierfachen Winkels u. s. w. aus dem gegebenen Sinus des einfachen finden könne. Man giebt den Winkel ACD und seinen Sinus AD; nun solle man den Sinus des doppelten, dreysfachen u. s. w. suchen. Aus der Figur erhellet von selbst, daß CA der Sinus totus, wie z. E. in der 50. Fig. bey dem Winkel ECD auch EC der Sinus totus ist. Demnach wird auch CD der Cosinus seyn, $=\sqrt{CA^2 - AD^2}$; folglich läßt sich auch dieser finden. Nun verlängere man CD nach Belieben bis in G und CA bis in F, und ziehe die Linie AB = AC,

Die man aus dem gegebenen Sinus des einfachen Winkels den Sinus des zweyfachen, dr. pfachen, u. s. w. finden könne.

Tab. III.
Fig. 60.

Tab. III.
fig. 60.

= AC, daß man das gleichschenklige
 Dreyeck CAB bekomme; auf gleiche ^{Auflösung}
 Weise bestimme man mit einerley Eröff-
 nung des Zirkels die Linie BF = AB = ^{und}
 AC, so wird sich das gleichschenklige
 Dreyeck ABF ergeben; ferner mache man ^{Beweis.}
 FG = FB = BA = AC, damit man
 noch ein gleichschenkliges Dreyeck BFG
 bekomme u. s. w. In diesem Fall nun
 wird die von B auf CF gefällte Perpendi-
 cularlinie BE der Sinus des doppelten
 Winkels ACD, und die von F auf CG
 gefällte Perpendicularlinie FH der Sinus
 des dreyfachen Winkels ACD werden,
 u. s. w. Dieses wollen wir jetzt beweisen:

$$\begin{array}{rcl}
 r & = & n + 0 \quad \text{§. 147.} \\
 n & = & 0 \quad \text{§. 145.} \\
 \hline
 r & = & n + n \\
 2n & = & n + n \\
 \hline
 r & = & 2n. \text{ Da nun} \\
 \sin. r & = & EB, \text{ so ist auch} \\
 \hline
 \sin. 2n & = & EB.
 \end{array}$$

Aus gleichem Grunde ist s der äussere
 Winkel von dem Dreyeck CBF, folglich
 so groß als $n + x$ zusammen ist; da nun
 $x = r$, weil das Dreyeck ABF gleich-
 schenklich ist, und $r = 2n$, wie wir er-
 wiesen, so ist $s = n + 2n = 3n$; folglich
 FH der Sinus von s auch der Sinus von
 $3n$. Oder in Zeichen:

$$\text{§ g f}$$

$$s =$$

$$s = n + x$$

$$r = x \quad \text{§. 145.}$$

$$s = n + r$$

$$2n = r$$

$$s = n + 2n \quad \text{das ist}$$

$$s = 3n.$$

Da nun

$$\sin. s = FH \quad \text{so ist auch}$$

$$\sin. 3n = FH.$$

Da nun ferner, weil bey D und E rechte Winkel find, und n sich selber gleich ist, nach den Proportionsregeln

$$CA : AD = CB : BE \quad \text{das ist}$$

$\sin. tot : \sin = 2 \cosin : BE$, so findet man den Sinus des doppelten Winkels $\sin. 2 \cosin.$

$$EB = \frac{\sin. 2 \cosin.}{\sin. tot.}, \quad \text{wenn man nemlich}$$

den gegebenen Sinus des einfachen Winkels mit seinem doppelten Cosinus multiplicirt, und das Product durch den Sinus totus dividirt. Weil nun abermal aus gleichem Grunde $CA : CD = CB : CE$

$$\text{folglich } CE = \frac{CD \cdot CB}{CA}, \quad \text{und } AE = CE$$

$$- CA = \frac{CD \cdot CB}{CA} - CA = \frac{CD \cdot CB - CA^2}{CA}$$

$$\begin{aligned} & \text{folglich (weil } CB = 2CD, \text{)} \\ & = \frac{CD \cdot 2CD - CA^2}{CA} = \frac{2CD^2 - CA^2}{CA}, \end{aligned}$$

und (weil $CA^2 = CD^2 + AD^2$.) Der
 letzte

lehre dem obigen aber vollkommen gleiche

$$\text{Ausdruck} \quad \frac{2CD^2 - CD^2 - AD^2}{CA}$$

$$= \frac{CD^2 - AD^2}{CA}. \text{ Nun ist } AE = EF,$$

weil die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyecks durch die Perpendicularlinie BE in zween gleiche Theile getheilet wird; folglich wird

$$EF = \frac{CD^2 - AD^2}{CA} \quad \text{und daher}$$

$$\begin{aligned} CF &= CE + EF = \frac{CD \cdot CB}{CA} + \frac{CD^2 - AD^2}{CA} \\ &= \frac{2CD^2}{CA} + \frac{CD^2 - AD^2}{CA} = \frac{3CD^2 - AD^2}{CA}. \end{aligned}$$

Nunmehr ergibt sich leicht eine neue Proportion, $CA:AD=CF:FH$, das ist, wenn man den gefundenen Ausdruck für CF setzt,

$$CA:AD = \frac{3CD^2 - AD^2}{CA} : FH,$$

folglich ist FH der Sinus des dreifachen

$$\text{Winkels} = \frac{3CD^2 \cdot AD - AD^3}{CA^2} \quad \text{das ist,}$$

wenn man die Linien wirklich mit den trigonometrischen Namen belegt,

$$\frac{3(\sin. \times \text{Cosin.}^2) - (\sin.^3)}{(\sin. \text{ tot.}^2)}$$

Oder, wenn der Sin. tot. = r der Sinus
= s

476 Geom.II Cap. Von Ausmessung

= s und der Cosinus = c gesetzt wird, so hat man den Sinus des dreifachen Winkels

Allgemeine
Regel für
den Sinus
des vielfa-
chen Winkels,

$$= \frac{3sc^2 - s^3}{r^2} \cdot \text{Neben diesen Re-}$$

geln suchet man den Sinus des vierfachen Winkels u. s. w. Da sich dann eine Progression ergeben wird, welche die folgende ist:

Der Sinus des einfachen Winkels seye
= s

so ist der Sinus des zweifachen = $\frac{2sc}{r}$

des dreifachen = $\frac{3sc^2 - s^3}{r^2}$

des vierfachen = $\frac{4sc^3 - 4s^3c}{r^3}$

des fünffachen = $\frac{5sc^4 - 10s^3c^2 + s^4}{r^4}$

des sechsfachen = $\frac{6sc^5 - 20s^3c^2 + 6s^5c}{r^5}$

des siebenfach. = $\frac{7sc^6 - 35s^3c^4 + 21s^5c^2 - s^7}{r^6}$

Wenn man nun diese Progression mit dem Newtonischen Binomio §. III. vergleicht, so wird man finden, daß der Sinus des vielfachen Winkels überhaupt durch einen allgemeinen Ausdruck seye

$$\frac{n c^{n-1} s}{r^{n-1}} + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 c^{n-3} s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot r^{n-1}} + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot n - 4 c^{n-5} s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot r^{n-1}} \text{ u. s. w.}$$

Hingegen der Cosinus wird folgende Progression geben; • Wie auch für den Cosinus des vielfachen Winkels.

nemlich der Cosinus des einfachen Winkels

$$= c$$

$$\text{des zweyfachen} = \frac{c^2 - s^2}{r}$$

$$\text{des dreyfachen} = \frac{c^3 - 3s^2 c}{r^2}$$

$$\text{des vierfachen} = \frac{c^4 - 6s^2 c^2 + s^4}{r^3}$$

$$\text{des fünffachen} = \frac{c^5 - 10s^2 c^3 + 5s^4 c}{r^4} \text{ u. s. w.}$$

Dahero der allgemeine Ausdruck für den vielfachen Cosinus ist $\frac{c^n}{r^{n-1}}$

$$\frac{n \cdot n - 1 \cdot c^{n-2} s^2}{1 \cdot 2 \cdot r^{n-1}} + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 c^{n-4} s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot r^{n-1}}$$

u. s. w. Diese Formeln lassen sich bey der Anwendung auf verschiedene Fälle noch kürzer ausdrucken; allein uns genüget, die allgemeine Regel angeführet und erwiesen zu haben. Man wird im folgenden fortkommen können, wenn man diesen ganzen Absatz überschlägt, welches wir

wir zum Behuf für die Anfänger, denen diese Auflösung zu mühsam scheinen möchte, noch hinzu sagen. Aus eben diesem Grunde wollen wir auch die allgemeine Regel für die Tangenten diesmal übersgehen. Im vierten Capitel werden solche Sätze vorgetragen werden, durch welche dergleichen Arbeiten ungemein erleichtert werden. Die Lehre von Erfindung der Sinus für die Minuten und Secunden, beruhet auf dem Satz, daß man einen so kleinen Bogen für eine gerade Linie ansehen könne; da dann hernach alles nach den Proportionsregeln ähnlicher Dreyecke bestimmt und gefunden wird.

Wie man die Sinus der Minuten und Secunden finde.

Anwendung dieser Lehre auf die Erfindung der unbekannten Stücke eines Dreyecks;

wozu man nur zween Sätze nöthig hat,

Tab. III.
Fig. 52.

der erste ist, daß die Sinus ähnlicher Bogen einerley Verhältniß zu ihren Radiis haben.

§. 180. Nun wollen wir zeigen, wie man durch Hülfe der Sinus und Tangenten die noch unbekannte Stücke der Dreyecke aus einigen gegebenen Theilen finden könne. Wir haben nur zween Sätze dazu nöthig, die wir jezo erweisen wollen. Der erste ist der folgende: Die Sinus ähnlicher Bogen haben einerley Verhältniß zu ihren Radiis; das ist:

$GF : GC = ED : EC$. Der Beweis ist leicht; bey D und F sind rechte Winkel; und der Winkel GCD ist sich selber gleich, folglich ist das Dreyeck GFC dem Dreyeck EDC ähnlich; demnach werden auch die gleichen Winkeln entgegen stehende Seiten proportionell seyn; das ist

$GF : GC = ED : EC$. Hieraus siehet man,

man, daß es gleichviel ist, ob ich den Sinus eines Winkels DCG von G oder von E herab ziehe, das ist einer nahen oder weiten Entfernung vom Scheitelpunkt oder von der Spitze des Winkels C suche: denn der Sinus ED ist so gut der Sinus des Winkels DCG als es der Sinus GF ist; indeme der Bogen AE in Absicht auf die Anzahl seiner Grade so groß ist als der Bogen GD; folglich muß auch der Sinus ED so viel Theile von seinem Sinus totus EC in sich begreifen, als der Sinus GF von dem seinigen, nemlich von GC. Der Grund von diesem Satz ist schon anfangs gleich in der Geometrie vorgetragen worden, da wir gezeigt haben, daß es gleichgültig seye, ob man mit einer kleinen oder grossen Eröffnung des Zirkels einen Winkel messe. Der

Dahero es gleichgültig, ob man den Sinus des Winkels in einem grossen oder kleinen Strich sucht.

andere Fundamentalsatz, der zu wissen unumgänglich nöthig ist, heisst also: In einem jeglichen Dreyeck verhalten sich die Seiten zu einander, wie die Sinus der den Seiten entgegen stehenden Winkel. Durch Hülfe dieses wichtigen Satzes werden hernach alle trigonometrische Aufgaben nach der Regel Descri aufgelöst. Wir wollen jeko den Satz selbst beweisen. Weil allemal durch drey Punkte ein Cirkel beschrieben werden kann, so kann auch um ein jedes Dreyeck, es mag beschaffen seyn, wie es will, ein

Zweiter Satz, daß in einem Dreyeck sich die Seiten zu einander verhalten wie die Sinus der den Seiten entgegen stehenden Winkeln,

Tab. III.
Fig. 51.

wird un-
ständig er-
kläret und
bewiesen.

ein Cirkel beschrieben werden. Folglich wird, was von der 51. Fig. gesagt wird, von allen Dreiecken gelten. Wenn wir nun die Figur ansehen, so muß uns gleich aus der Geometrie einfallen, daß der Winkel o zu seinem Maas den halben Bogen BC hat, worauf er steht; eben so wird m zu seinem Maas den halben Bogen AB , und n den halben Bogen AC haben. Nun fragt sich, weil wir die Sinus wissen wollen, was die Sinus dieser halben Bögen seyen. Das muß uns nun ganz frisch noch im Gedächtniß seyn, daß der Sinus von dem halben Bogen BC die halbe Sehne BC , und der Sinus von dem halben Bogen AC die halbe Sehne AC , und der Sinus von dem halben Bogen AB die halbe Sehne AB seyen; sie werden es also auch von den Winkeln o , n und m seyn. Demnach müssen sich die Winkel zu einander verhalten wie die Sinus: diese aber sind die Hälften der entgegen stehenden Sehnen oder Seiten. Folglich verhalten sich die Sinus wie die halbe Sehnen oder Seiten, demnach auch wie die ganze Seiten. Das ist in Zeichen:

$$\begin{aligned} o &= \frac{1}{2} BDC \text{ und } m = \frac{1}{2} AGB \text{ folglich} \\ \sin. o &= \sin. \frac{1}{2} BDC \quad \sin. m = \sin. \frac{1}{2} AGB. \\ \frac{1}{2} BC &= \sin. \frac{1}{2} BDC \quad \frac{1}{2} BA = \sin. \frac{1}{2} AGB. \\ \hline \sin. o &= \frac{1}{2} BC. \quad \sin. m = \frac{1}{2} BA. \end{aligned}$$

Demo

$$\text{Demnach } \sin.o : \frac{1}{2}BC = \sin.m : \frac{1}{2}BA$$

$$\text{und } \sin.o : \sin.m = \frac{1}{2}BC : \frac{1}{2}BA$$

folglich $\sin.o : \sin.m = BC : BA$.

Da nun die Seite BC dem Winkel o und die Seite BA dem Winkel m entgegen steht, so ist klar, daß sich in einem Dreyeck die Seiten zu einander verhalten, wie die Sinus der entgegenstehenden Winkel. Man begreift ohne unser Erinnern, daß man eben dieses von den Winkeln o und n und den Seiten BC und AC auf gleiche Weise demonstrieren könne. Wenn man sich diesen Satz recht bekannt macht, so wird man im folgenden keine Schwierigkeit mehr finden.

§. 181. Nunmehr können wir die gewöhnlichste und gemeinste trigonometrische Aufgaben erklären. Denn es sind noch verschiedene andere übrig, wozu man die Lehrsätze in meinem mathematischen Lehrbuch findet. Der erste und leichteste Fall ist, wenn man aus einer Seite und zween Winkeln, die einem gegeben werden, die übrige Stücke suchen solle. Den dritten Winkel darf ich nicht erst suchen, weil im geradenlinichten Dreyeck der dritte Winkel allemal durch die nach Abzug der zween gegebenen Winkeln noch zu 180° fehlende Zahl bestimmt wird. Man sucht also nur die zwe Seiten; und sagt: wenn die Seite AC und die Winkel o und m gegeben,

Aus dem bis herigen werden nun die trigonometrische Aufgaben bestimmt;

Erster Fall, wie man aus zween Winkeln und einer Seite die übrige zwe Seiten eines Dreyecks finden solle.

Tab. III.
Fig. 51.

Sh

folgo

folglich auch der dritte Winkel n gegeben ist; so ist

$\sin. n : AC = \sin. o : BC$, daher

$$\frac{AC \cdot \sin. o}{\sin. n} = BC.$$

Das löst man hernach logarithmisch auf, damit man nicht mit so grossen Zahlen multipliciren und dividiren darf; daher diese Operation in eine Addition und Subtraction verwandelt wird. Folglich ist

$$\log. BC = (\log AC + \log. \sin. o) - \log. \sin. n.$$

Diese Logarithme sucht man in den gedruckten Tafeln, und nach geschehener Berechnung wird die dem Logarithmus von BC correspondirende Zahl in eben diesen Tafeln wiederum gesucht. Wenn also AC der Diameter der Erde wäre, und zween Astronomen beobachteten die Sonne zu gleicher Zeit, der eine am Ende A und der andere am Ende C ; so würde, wenn sie die Winkel o und m , unter welchen sie die Sonne sahen, aufschreiben, die ganze Distanz oder Weite der Sonne von der Erde nach dem gemeldeten leichtesten Problem bestimmt und berechnet werden, unerachtet noch kein Mensch von der Erde in die Sonne gekommen ist. Daß sich übrigens von dieser Gattung unendlich viel praktische Aufgaben vorlegen lassen, ist ohne unser Erinnern klar; wir wollen uns daher nicht damit aufhalten.

Dieser leichteste Fall wird durch ein Exempel erläutert.

§. 182. Der andere Fall ist, wenn zweyter Fall, zwei Seiten und ein daneben liegender Winkel, wenn zwei Seiten und ein daneben liegender Winkel gegeben werden. Z. E. es seye gegeben AB, AC, und der Winkel n; so ist nach §. 180.

$$AC : \sin. n = AB : \sin. m,$$

folglich ist $\sin. m = \frac{\sin. n. AB}{AC}$

Wenn ich aber den Sinus des Winkels habe, so habe ich auch den Winkel; habe ich aber zweyen Winkel m und n, so habe ich auch den dritten o; will ich nun die Seite BC vollends wissen, so setze ich

$$\sin. n : AC = \sin. o : BC.$$

das ist $\frac{AC. \sin. o}{\sin. n} = BC.$

oder logarithmisch

$$l. BC = (l. AC + l. \sin. o) - l. \sin. n.$$

Hieraus siehet man, daß in der Trigonometrie ein Dreyeck aus zwei Seiten und einem Winkel gefunden werden könne, wenn auch der Winkel schon nicht eingeschlossen ist. An und vor sich selbst wird ein Dreyeck durch zwei Seiten und einen anliegenden Winkel nicht bestimmt. Denn es seye gegeben der Winkel CAB, ferner die Linie CA und CB; so werde ich, wenn CAB ein spitziger Winkel ist; die Linie CB entweder in B unter einem stumpfen, oder in D unter einem spitzigen Winkel anbringen können, folglich entweder das Dreyeck

Warum und wie ferne man in der Trigonometrie aus zwei Seiten und einem daneben liegenden Winkel die übrige Stücke bestimmt. Tab. III. Fig. 58. stimmen können, da man doch im ersten Capitel sagte, das

Dreueck wer-
de nur als
dann be-
stimmt, wenn
die zwei Sei-
ten den Win-
kel einschlies-
sen?

wird um-
ständiglich be-
antwortet.

ACB oder ACD bekommen, in welchem Fall es also scheint, daß die trigonometrische Aufgabe mich betrügen könne. Allein der Sinus des stumpfen Winkels ABC ist kein anderer, als der Sinus des spitzigen Winkels ADC: denn weil $CB = CD$ nach der Bedingung, so ist $n = r$. Nun ist o der Nebenwinkel von n , folglich wird ers auch von r seyn; der Sinus eines stumpfen Nebenwinkels ist aber allemal so groß als der Sinus seines spitzigen Nachbars, weil zweien Nebenwinkel einerley Sinus haben. Folglich fehlt die Trigonometrie hierinnen nicht. Nur muß man einem sagen, ob das Dreueck, in diesem Fall, davon die Rede ist, spitzwinklicht oder stumpfwinklicht seye, weil sonst die gesuchte dritte Linie entweder zu groß oder zu klein würde. Ist es rechtwinklicht, so hat die Sache vorhin keine Schwierigkeit, wie aus der Figur und aus dem folgenden erhellen wird.

§. 183. Der dritte Fall heißt: wenn in einem rechtwinklichten Dreueck zwei Seiten, die den rechten Winkel einschließen, gegeben sind, so solle man die übrige Winkel und Seiten finden. Die gegebene Seiten seyen AB und AC; folglich wird nach der Bedingung des Problems bey A ein rechter Winkel seyn. Wann ich nun die Seite AC für den Radius annehme, und den Bogen AD damit be-
schrei-

der Fall
wenn zwei
Seiten, die
den rechten
Winkel ein-
schließen, ge-
geben sind.

Tab. III.
Fig. 57.

schreibe, so wird die andere Seite AB die Tangente des Winkels n seyn; demnach, weil der Radius der Sinus totus ist, giebt es folgende Proportion:

$$AC : AB = \sin. tot. : Tangent. n.$$

Dahero $\frac{AB \sin. tot.}{AC} = Tang. n.$

Da man nun aus der gegebenen Tangente in den berechneten Tafeln der Sinuum und Tangentium den correspondirenden Winkel findet, so läßt sich auch diese Aufgabe auflösen; indeme man nun nach §. 187. fortfähret und sagt

$$\sin. n : AB = \sin. tot. : BC.$$

Da dann $BC = \frac{AB. \sin. tot.}{\sin. n.}$

§. 184. Ein anderer und etwas schwerer aufzulösender Fall ist derjenige, wenn einem zwey Seiten und der eingeschlossene spitzige oder stumpfe Winkel gegeben werden. Es seyen im Dreyeck BCF gegeben BC, BF und der eingeschlossene Winkel c; ich solle die zwey übrige Winkel finden. Aus der Arithmetik wissen wir noch, daß man aus der halben Summe und aus der halben Differenz zweyer Größen die Größen selbst finden kann. Die halbe Summe der gesuchten Winkel ist bekannt, weil ihre ganze Summe bekannt ist: wir suchen dahero nun ihre Differenz; welche nichts anders seyn wird, als die halbe Summe weniger dem kleinern Winkel von

Vierter Fall, wenn zwey Seiten nebst einem spitzigen oder

Tab. III. Fig. 59.

stumpfen Winkel, den sie einschließen, gegeben sind.

den gegebenen. Denn wenn die kleinere Grösse y heisst, und die Summe a , die Differenz aber b , so ist nach §. 129.

Auflösung
und

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{folglich} \quad & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = y. \\ & \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b + y \\ \text{und} \quad & \frac{1}{2}a - y = \frac{1}{2}b. \end{aligned}$$

Das ist, die halbe Summe weniger die kleinere von den gesuchten Grössen ist die halbe Differenz. Wenn also BCF der grössere von den gesuchten Winkeln ist, so wird CFB der kleinere seyn, folglich die halbe Differenz heissen

$$\frac{BCF + CFB}{2} - CFB; \text{ oder, damit wir nicht}$$

so viel schreiben dürfen, wenn wir den grössern Winkel $o + r$ und den kleinern s heissen, so ist die halbe Differenz

$$\frac{(o + r) + s}{2} - s. \text{ Diese wollen wir jetzt}$$

suchen. Man verlängere BF bis A, und mache $BA = BC$. Ferner schneide man von BF die Linie $BE = BC$ ab; so wird ACE ein rechter Winkel seyn, weil ein halber Winkel um ihn beschrieben werden kann, auf dem er aufsteht, und an dessen Peripherie er sich endiget; indeme $BA = BC = BE$ als Radii ihn bestimmen. Man ziehe ferner mit CE die Parallele DF aus dem Punkt F, so wird auch bei D ein rechter Winkel seyn. §. 146. Endlich weil $BA = BC$, so wird die Linie

AF

$AF = BC + BF$ die Summe der gegebenen Seiten, und $EF = BF - BE = BF - BC$ ihre Differenz seyn. Nun wird sich die halbe Differenz der Winkel bald ergeben: denn es ist

$$m = (o + r) + s \quad \S. 147.$$

$$m = o + n \quad \S. \text{cit.}$$

$$(o + r) + s = o + n$$

$$o = n \quad \S. 145.$$

$$(o + r) + s = 2n.$$

$$\text{---} : 2$$

$$(o + r) + s$$

$$\text{---} = n = \text{halbe Summe:}$$

2

$$s + p = n \quad \S. 146.$$

$$(o + r) + s$$

$$\text{---} = s + p.$$

2

$$s = s \text{ der kleinere Winkel.}$$

$$(o + r) + s$$

$$\text{---} - s = p. \text{ halbe Differenz;}$$

2

Also ist der Winkel p oder CFD die halbe Differenz der gesuchten Winkel; wenn wir also die Grösse dieses Winkels wissen, so werden wir die gesuchte Winkel leicht finden können. Das Anschauen der Figur bringt uns auf folgende Proportion:

$$AF : EF = AD : CD.$$

Das ist in Worten ausgedruckt: die Summe der Seiten zur Differenz der Seiten wie AD die Tangente von der hal-

ben Summe der gesuchten Winkel (dann $s + p = n$ und n ist die halbe Summe) zu CD der Tangente des Winkels p oder der halben Differenz. Da nun die drey ersten Linien bekannt sind, so findet man auch die vierte; folglich auch den dieser Tangente correspondirenden Winkel p , welcher die halbe Differenz ist; da dann $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}p = (o + r)$ und $\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}p = s$ nach §. 129. gefunden wird. Sind aber die Winkel gefunden, so wird die übrige Seite CF nach §. 181. sich leicht bestimmen lassen.

Fünfter Fall,
wenn drey
Seiten gege-
ben werden,
aus welchen
man hernach
die Winkel
finden sollte;

§. 185. Es ist noch ein Fall übrig, wenn einem drey Seiten gegeben werden, aus welchen man die drey Winkel suchen solle. Und das ist der letzte Fall. Man begreift ohne unser Erinnern von selbst, daß die drey gegebene Seiten einander ungleich seyen: denn wenn sie gleich wären, so würden sich die gesuchte Winkel ohne weitere trigonometrische Rechnung aus §. 147. leicht bestimmen lassen. Die Aufgabe hat also vornehmlich ungleichseitige Dreyecke zu ihrem Augenmerke, unerachtet übrigens auch die gleichseitige dadurch aufgelöst werden können, wenn man eine langwürige und beschwerliche Rechnung einer kurzen und leichten vorziehen will. Es seyen demnach in dem Dreyeck ACB die Seiten AC , CB , und BA gegeben, man solle die Winkel suchen. Dies

ses

Tab. III.
Fig. 55.

ses zu bewerkstelligen, muß man den aus der 53. Fig. leicht zu beweisenden Lehrsatz sich bekannt machen, daß nemlich sene

$$CB:CD=CG:CF.$$

Tab. III.
Fig. 53.

Denn wenn wir bewiesen haben, daß $0=y$, so hat die Sache ihre Richtigkeit, weil der andere Winkel FCG beeden Dreyecken CBD und CGF gemein ist. Das erstere läßt sich leicht beweisen.

$$x = \frac{FBD}{2} \quad \S. 148.$$

$$y = \frac{FGD}{2} \quad \S. \text{cit.}$$

$$x + y = \frac{FBD+FGD}{2} \quad \S. 9.$$

$$\frac{360^\circ}{2} = \frac{FBD+FGD}{2}$$

$$x + y = \frac{360}{2} = 180^\circ. \quad \S. 9.$$

$$0 + x = \frac{360}{2} = 180^\circ. \quad \S. 141.$$

$$x + y = 0 + x \quad \text{folglich} \\ \hline \S. 9.$$

$$x = x$$

$$y = 0.$$

Wir haben also bewiesen, was wir beweisen wollten. Wenn man nun in der 55. Fig. aus dem Punkt C des Dreyecks ACB mit dem Radius CB einen Cirkel beschreibt, so ist $CD=CB=CH$; folglich AD die Summe zweyer Seiten und

Hh 5

AH

Auflösung

und

Beweis.

Tab. III.
Fig. 55.

AH ihre Differenz. Da nun nach dem erstgemeldten Lehrsatz

$$AB:AD=AH:AF,$$

das ist die Grundlinie des Dreiecks zur Summe der zwei übrigen Seiten, wie ihre Differenz zum Stück AF; so läßt sich AF durch die Regel Detri, folglich auch $FB = AB - AF$ leicht finden. Wenn man nun aus C einen Perpendikel auf FG herabläßt, so ist $FG = GB$ §. 151. und bey G ein rechter Winkel. Demnach findet man den Winkel GCB, wenn man sagt §. 183.

$$CB:\sin.\text{tot}=GB:\sin.GCB.$$

Hat man aber den Winkel GCB gefunden, so hat man auch den Winkel GBC §. 165. Eben so sucht man den Winkel ACG, weil $AC:\sin.\text{tot} = AG:ACG$; folglich ergiebt sich der dritte Winkel CAB von selbst. Man kann also aus einer Seite und zweien Winkeln, aus zwei Seiten und einem Winkel, und endlich aus drey Seiten die übrige drey Stücke eines Dreiecks nach den trigonometrischen Lehrsätzen richtig finden.

§. 186. Wir haben nunmehr alles gesagt, was wir in der Trigonometrie zu sagen gesonnen waren. Weil wir aber versprochen, hier dasjenige noch kürzlich nachzuholen, was je und je sonst in der Geometrie von dem sogenannten

Von dem
großen Nutzen
der Tri-
gonometrie

ten Meßtschleim und andern Mitteln; un- in der prakti-
 zugängliche Weiten und Höhen abzumef- schen oder
 sen, gesagt und vorgetragen wird, so ausübenden
 wollen wir das practische davon nur kurz Mathema-
 lich noch berühren. Die Hauptsache be- tik.
 steht darinnen, daß man eine Linie und
 ein paar Winkel, oder umgekehrt einen
 Winkel und ein paar Linien misst. Dies
 se zwei Aufgaben, besonders die erste,
 kommen am öftesten vor. Nun wird man
 allemal, man mag messen, was man will,
 auf dem Erdboden so viel Raum bekom-
 men, daß man eine Linie messen kann.
 Mit den Winkeln hat es eine gleiche Be-
 schaffenheit. Schreibt man nun den Inn-
 halt der Linien und Winkel auf, so kann
 man die gesuchte Linien daheim bey guter
 Muffe trigonometrisch berechnen, ohne
 daß man andere Mittel dazu nöthig hät-
 te. Ich habe schon gemeldet, daß die
 leichteste trigonometrische Aufgabe am
 meisten gebraucht werde: die Höhe eines
 Thurmes, zu dem man nicht einmal kom-
 men kann, die Weite zweyer unzugäng-
 licher Dörfer, die größte Entfernung der
 Sterne u. s. w. lassen sich durch diese sim-
 ple Aufgabe leicht bestimmen, wie wir
 schon S. 181. ein Exempel dßfalls gege-
 ben haben. Kommen aber auch solche
 Fälle vor, wo man aus zwei Seiten und
 einem eingeschlossenen Winkel oder auch
 aus drey Seiten die übrige Stücke finden
 solle;

solle; so haben wir ja die Art und Weise, wie man hie zu Werke geht, ebenfalls umständlich vorgetragen. Die besondere und practische Hülfsmittel durch Transporteur, Astrolabien, Quadranten, u. s. w. gehören zur ausübenden Mathematik; die Arbeit wird dadurch erleichtert und die Rechnung zuverlässiger; in der Theorie aber geben dergleichen Instrumente an und vor sich selbst kein grösseres Licht. Aus diesem Grunde glauben wir, daß die Absicht unserer gegenwärtigen Arbeit keine umständliche Nachricht von der Instrumentenlehre erfordere; daher wir auch dieses Capitel, ohne den Vorwurf etwas nöthiges übergangen zu haben, jetzt beschliessen dürfen.

Drittes Capitel.

Von den Kegelschnitten und andern krummen Linien.

§. 187.

Die Kegelschnitte sind von Alters her immer ein Gegen-

Unter allen krummen Linien haben die sogenannte Kegelschnitte oder conische Sectionen je und je eine Hauptbeschäftigung der Mathematikverständigen ausgemacht. Die meiste Mühe hat sich

sich Apollonius von Perge, dinstfalls ge-
 geben, und seinen Namen durch diese
 Arbeiten bey der Nachwelt verewiget.
 Aus dem ersten Capitel dieses zweyten
 Theils muß es unsern Lesern noch bekannt
 seyn, was ein Conus oder Regel seye.
 Die 48. und 65. Fig. stellen einen vor.
 Nun kann man ihn mit einer Fläche auf
 verschiedene Weise schneiden. Gehet die
 schneidende Fläche durch den Scheitel-
 punkt D, so entsteht das Dreyeck DBC,
 folglich eine geradelinichte Figur; gehet
 sie mit der Grundfläche BGC parallel, so
 bekommt man einen Cirkel; welcher auch
 erzeugt wird, wenn man einen scaleni-
 schen oder ungleichseitigen Regel also schnei-
 det, daß der Winkel, den der Diameter
 des Durchschnittes mit der einen Seite
 des Regels bestimmt, eben so groß wird,
 als der Winkel, den die andere Seite des
 Regels mit dem Diameter seiner Grund-
 fläche macht. Ein solcher Schnitt heißt
 sectio subcontraria, und wird vornemlich
 bey den perspectivischen und astron-
 omischen Projectionen genüket. Weil nun
 durch diese drey Gattungen von Durch-
 schnitten theils geradelinichte Dreyecke,
 theils Cirkel erzeugt werden, so gehören
 sie nicht zu den eigentlichen Regelschnitten,
 indeme die Lehre von den Dreyecken so-
 wohl als von den Cirkeln in dem ersten
 Cap. der Geom. abgehandelt wurde. Es
 giebt

stand der
 Mathematik
 gewesen;

Was ein Re-
 gel oder Co-
 nus seye, und
 auf wie vie-
 lerley Weise
 er geschnit-

Tab. IV.
 fig. 65.

ten werden
 könne.

Erste Art des
 Schnitts,
 wodurch ein
 geradelinich-
 tes Dreyeck
 entsteht.

Zweyte

und dritte
 Art, welche
 auch sectio
 subcontraria
 heißt, und
 wodurch Cir-
 kel entstehen.

Warum diese
 drey Arten zu
 den eigentli-
 chen Regels-
 schnitten,
 wovon in dies-
 sem Capitel

die Neße ist,
nicht gerech-
net werden.

Vierte Art,
wodurch eine
Tab. IV.
Fig. 65.

Parabel ent-
steht.

Fünfte und
sechste Art,
wodurch El-
lipsen und
Hyperbeln
erzeuget wer-
den.

Tab. IV.
fig. 65.

Von der Pa-
rabel, und
wie sie aus
dem Kegel
geschnitten
werde.

Wie man die
Eigenschaft
der Parabel
aus Betrach-

giebt aber noch drey andere conische Sectio-
nen, welche in diesem Capitel ihre eigene
Stelle erhalten. Denn man kann einen
Kegel auch also schneiden, daß die Ase
des Durchschnit-tes Ah mit der entgegen-
stehenden Seite des Kegels DC entweder
allezeit parallel bleibt, oder daß sie diese
Seite unter einem beliebigen Winkel in-
nerhalb der Spitze des Kegels durchschnei-
det, oder daß sie endlich mit der über die
Spitze D verlängerten Seite, wenn sie
gleichfalls verlängert wird, sich zuletzt ver-
einiget. Im ersten Fall entsteht eine
Parabel, im zweyten eine Ellipsis, im
dritten eine Hyperbel. Den Ursprung
dieser Namen wollen wir im folgenden
erklären.

§. 188. Wir reden zuerst von der
Parabel. Wenn ein Kegel so geschnit-
ten wird, daß die Ase des Durchschnit-
tes Ah mit DC parallel, und die Linie Gh
mit dem Diameter der Grundfläche AC
einen rechten Winkel in h machet, so heißt
man die Figur AM Gh eine Parabel.
Nun wollen wir sehen, was diese Figur
für Eigenschaften habe. Man mache in
einem beliebigen Punkt E einen mit der
Grundfläche parallelen Durchschnit-
t EMF, so wird man einen Cirkel bekom-
men, weil die Grundfläche ein Cirkel ist.
Demnach wird auch PM mit Gh paral-
lel, und folglich kraft der Natur des Cir-
kels

fals seyn $PM^2 = PE \cdot PF$. Nun sind die zwey Dreiecke DCB und APE einander ähnlich. Folglich ist

$$DC : BC = AP : PE$$

und also $\frac{BC \cdot AP}{DC} = PE$.

Dahero, wenn man gleiches für gleiches substituirt, so hat man

$$PM^2 = \frac{AP \cdot BC \cdot PF}{DC}$$

Wenn man ferner aus dem Punkt A mit der Grundlinie eine Parallellinie AN zieht, so ist $AN = PF$, weil sie parallel sind, und zwischen einerley Parallellinien stehen. Da nun nach dem Grundsatz der Aehnlichkeit $DB : BC = DA : AN$, so ist $AN (= PF) = \frac{BC \cdot DA}{DB}$ folglich wenn man

abermal gleiches für gleiches setzt,

$$PM^2 = \frac{AP \cdot BC \cdot BC \cdot DA}{DC \cdot DB} = \frac{AP \cdot BC^2 \cdot DA}{DC \cdot DB}$$

Da nun der Punkt M nach Belieben angenommen werden kann, so wird die Gleichung auch bey einem jeden andern Punkt angehen, und allemal das Quadrat von

$$PM, \text{ oder } PM^2 = AP \cdot \frac{BC^2 \cdot DA}{DC \cdot CB}; \text{ und}$$

weil die Linien BC, DA, DC und CB unverändert bleiben, der Punkt M mag angenommen werden, wo man will, so kann man eine beständige Linie dafür setzen, oder

und unvert- oder selbige durch die Regel Detri suchen,
 änderliche Zi wenn man sagt:

DC. DB : $BC^2 = DA : AK$, der vier-
 ten Proportionallinie, welche AK seyn solle.
 Demnach wird $AK \cdot AP = PM^2$. Dies
 se beständige und unveränderliche Linie AK
 haben die Alten das *latus rectum*, die
 Neuere aber den Parameter genannt.
 Die Linie PM heißt die Semiordinate,
 und AP die Abscisse. Wenn man nun
 die Semiordinate PM immer y, die Ab-
 scisse aber x und den Parameter a nennet,
 so ist $ax = y^2$; und das ist die beständi-
 ge Eigenschaft der Parabel; woraus sich
 auch der Ursprung dieses Namens er-
 klären läßt. Denn man siehet bey diesen
 Gleichungen auf die Verhältnisse des
 Rectanguli aus dem Parameter in die
 Abscisse zum Quadrat der Semiordinate.
 Wenn das Rectangulum aus AK in AP,
 oder in der Figur, AKOP, dem Qua-
 drat von PM, oder PM^2 , gleich ist, so

Allgemeine
 Eigenschaft
 der Parabel.

Ursprung des
 Worts oder
 Namens
 Parabel;

wie auch der
 Ellipsis und

brucht der griechische Name Parabel
 diese Gleichheit aus. Wie deswegen auch
 in der Rhetorik, wiewohl in einem an-
 dern Verstand, die Parabel ein Gleich-
 niß heißet. Eben so, wenn das Qua-
 drat von PM kleiner ist als das Rectan-
 gulum AKOP, oder $AP \cdot AK$, so fehlet
 noch was zur Gleichheit, folglich heißt
 eine solche Figur eine Ellipsis; und wenn
 endlich das Quadrat von PM grösser ist
 als

als das Rectangulum $AP \cdot AK$, so entsteht der Hyperstehet eine Hyperbel, (ein Excessus). Das bes. ist der Ursprung dieser Namen, welche nun leicht zu verstehen sind, wenn man das vorgetragene mit Bedacht gelesen hat, und dabei ein wenig griechisch versteht.

§. 189. Wir haben uns bemühet, Warum man Anfängern zu gefallen, eine umständliche von dem Parameter und dessen Bestimmung so ausführlich gehandelt, und daher es komme, daß Beschreibung von dem Parameter zu geben. Manche können sich in die algebraische Aequationen dieser Art nicht so gleich finden, weil sie den Parameter nicht deutlich in der Figur sehen, da sie doch alle andere Linien, z. E. die Abscissen, die Semiordinaten, die Ape, den Diameter, u. s. w. sehen: Anfänger wegen dieser nicht so leicht in die Sinne fallender Linie nie hie und da Schwierigkeiten finden. daher wir glauben, uns mit dieser Lehre nicht ohne Noth aufgehalten zu haben. Doch wollen wir bey der Ellipsis und Hyperbel uns kürzer dñßfalls ausdrücken, und nur so viel melden, daß die beständige aber nicht so sichtbar in die Augen fallende Linie, Warum man aber doch im folgenden sich kürzer ausdrücken werde. welche der Parameter heißt, auf eine ähnliche Weise bey diesen beeden Figuren gefunden werden könne. Daher wird die Einbildungskraft im folgenden keine Einwendungen mehr machen, wenn wir gleich nicht allemal den Parameter vor ihre Augen hñmalen werden.

§. 190. Jetzt betrachten wir die Kegelschnitte als algebraische Linien, Wie man die Kegelschnitte als algebraische Linien außer der Verhältniß, die sie mit dem Regel haben,

nien betrach-
te;

was der Dia-
meter seye,
und wie er
von der Ape
unterschie-
den werde.

Tab. IV.
Fig. 66.
Fig. 68.

Tab. IV.
Fig. 67.

Erklärung
der Ordina-
ten und Se-
miordinaten;

Tab. IV.
Fig. 65. 66.
67. 68. 69.

ben, woraus sie geschnitten sind. Man muß sich aber die dabei vorkommende Namen und ihre Erklärungen wohl be-
kannt machen. Der Diameter einer
krummen Linie ist diejenige gerade Linie,
durch welche alle von einem Punkt der
krummen Linie zum andern gezogene ge-
rade Parallellinien in zween gleiche Thei-
le getheilet werden. Geschiehet diese
Theilung unter einem rechten Winkel, so
heißt der Diameter die Ape. So ist z.
E. die Linie AH die Ape der Parabel
ANM, die Linie AB die Ape der Ellipsis
AMNB u. s. w. denn wenn die krumme
Linie in Gedanken auf der andern Seite,
wie in der 67. Fig. um die Ape vollends
herumbeschrieben wird, so würde eine
eben so grosse Linie als PM unter einem
gleichen Winkel bis an den entgegen ge-
setzten Punkt der krummen Linie gezogen
werden können; da dann $PM = Pm$ wie
 $PR = Pr$. Eine solche ganze Linie z. E.
Mm heißt die Ordinate, und ihre Hälfs-
te PM die Semiordinate; sie mag her-
nach durch die Ape oder durch einen Dia-
meter überhaupt in zween gleiche Theile
bey P abgeschnitten worden seyn. Wir
werden aber vornehmlich die Semiordina-
ten in Rücksicht auf die Apen betrachten,
mit welchen sie rechte Winkel machen.
So sind FN, PM, Pm Semiordinaten,
welche alle, sie mögen auf den Diameter
oder

oder auf die Ase gezogen werden, parallel seyn, nur aber im letztern und gewöhnlichsten Fall, wenn man sie auf die Ase ziehet, die Ase unter rechten Winkeln schneiden müssen. Es ist noch eine Linie übrig, welche zu wissen gleich nöthig ist, nemlich die Abscisse. Sie ist allemal ein Theil entweder des Diameters oder der Ase, und wird durch die Semiordinate und den Scheitelpunkt der krummen Linie, von welchem man den Diameter zu ziehen anfängt, oder auch durch einen andern angenommenen festen Punkt bestimmt. So sind die Linien AF, AP, Ap in den schon angeführten Figuren Abscissen, in so ferne man sie von dem Scheitelpunkt A zu zählen anfängt. Allein die Linien CP, CF, in der 68. Fig. und CD in der 37. Fig. können auch als Abscissen angesehen werden, in so fern sie von dem Mittelpunkt C an gerechnet werden. Wie man die Semiordinaten in den Figuren gemeiniglich PM, und die Abscissen AP schreibt, so werden in den algebraischen Rechnungen, wofern nichts besonders angemerkt wird, jene allemal y und diese x genannt. Folglich wird in der Gleichung für die Parabel, wenn der Parameter a ist, der Ausdruck $a \cdot AP = PM^2$ algebraisch geschrieben $ax = y^2$. Diesen Ausdruck muß man sich vorzüglich bekannnt machen; weil alle Algebraisten das

Was die Abscissen einer krummen als gebr. Linie seyen;
und wie die Abscissen theils vom Scheitelpunkt, theils Tab. IV. Fig. 68 Tab. II. Fig. 37. von einem andern beliebigen Punkt, d. E. von dem Mittelpunkt, gerechnet werden können.
Mit was für Buchstaben die Abscissen und Semiordinaten gemeiniglich ausgedruckt werden;

Warum sie
veränderliche
Linien hei-
ßen;
und was un-
veränderli-
che oder be-
ständige
Größen
seyn;

Tab. IV.
fig. 66.

ben bleiben, und die Abscissen x die Semiordinaten aber y nennen. Beide heisset man auch veränderliche Größen (quantitates variables) in Rücksicht auf die unveränderliche Größen (quantitates constantes), dergleichen z. E. im Circle der Radius, in den conischen Sectionen der Parameter u. s. w. ist. Daß aber die Abscissen und Semiordinaten wirklich veränderliche Größen seyen, erhellet aus den Figuren. Z. E. die Abscisse AF ist kleiner als AP , darum correspondirt der ersteren auch eine kleinere Semiordinate FN als der letzteren, nemlich PM . Dem ungeachtet bleibt der Parameter bey AF so groß als bey AP , und wird im geringsten nicht verändert. Die übrige Erklärungen von einigen noch zu bestimmenden Linien wollen wir an ihrem Ort gehörig anbringen, damit wir unsere Leser nicht auf einmal mit so vielen Definitionen ermüden.

Einige Fol-
gen aus der
Gleichung
für die Para-
bel;

§. 191. Die erste krumme Linie, die von den conischen Sectionen abhänget, ist die Parabel. Nun haben wir §. 187. schon bewiesen, daß bey dieser Linie $ax = y^2$ oder $a \cdot AP = PM^2$, das ist, daß das Product aus der Abscisse in den Parameter dem Quadrat der Semiordinate gleich seye; wir dürfen daher diese Fundamentalgleichung jeko zum Grunde legen, und das weitere daraus schliessen. Weil $ax = y^2$, so ist, wenn man beiderseits mit

mit a dividirt, $x = \frac{y^2}{a}$, und wenn man

mit x dividirt, $a = \frac{y^2}{x}$, und wenn man

die Quadratwurzel beiderseits ausziehet, $\sqrt{ax} = y$. Diese Ausdrücke folgen unmittelbar aus der Gleichung, und werden uns im folgenden zu statten kommen.

Wir gehen aber weiter, und führen jetzt eine wichtige Eigenschaft der krummen Linien dieser Art an. Eine jede solche Linie muß in ihrer Ase einen Punkt haben, in welchem die Semiordinate dem halben Parameter gleich ist. Ein solcher Punkt wird der Brennpunkt genannt (focus). Der Ursprung dieses Namens gründet sich auf die optische Wissenschaften, weil nemlich alle Strahlen in einem parabolischen Spiegel u. s. w. gegen diesen Punkt gebrochen, folglich darinnen gesammelt werden, und eine Hitze verursachen, welche den Namen eines Brennpunktes wohl verdient. Nun begehrt man zu wissen, wie weit es von dem Scheitelpunkt der Ase, nemlich von A zu diesem Brennpunkt in der Parabel sene? Es sene der gesuchte Punkt F , so wird nach der gegebenen Erklärung die Semiordinate FN dem halben Parameter gleich seyn; da wir nun bei der Parabel den Parameter a nennen, so ist $FN = \frac{1}{2}a$; AF ist eine Abscisse, welche

Von dem Brennpunkt einer krummen Linie, und warum derjenige Punkt der Abscisse, in welchem die Semiordinate dem halben Parameter gleich ist, der Brennpunkt genannt werde, wird aus den optischen Wissenschaften erläutert.

Tab. IV. Fig. 66.

Wie man den Brennpunkt der Parabel finde,

che folglich, wie alle Abscissen, x heisset. Da nun $ax = y^2 = FN^2$, so wird, wann man gleiches für gleiches setzt, im gegenwärtigen Fall seyn

$$ax = \frac{1}{4}a^2 \quad \text{weil } \frac{1}{2}a = FN \text{ und das Quadrat von } \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2.$$

Demnach

$$: a$$

$$x = \frac{1}{4}a;$$

das ist, die Distanz des Brennpunkts vom Scheitelpunkt der Ase ist in der Parabel dem vierten Theil des Parameters gleich. Verlangt man ferner zu wissen, wie groß die vom Brennpunkt F bis an das Ende einer Semiordinate M gezogene Linie FM seye, so wird sich ihre Größe durch folgende Rechnung leicht bestimmen lassen: wenn $AP = x$, so ist $PF = AP - AF = x - \frac{1}{4}a$; wenn nemlich AP größer als AF , oder die Abscisse über den Brennpunkt hinaus geht. Nun ist nach den geom. Lehrsätzen des ersten Capitels §. 159. $PM^2 + PF^2 = FM^2$, weil bey P ein rechter Winkel; das giebt in Buchstaben folgende leichte Rechnung

$$PM^2 = ax$$

$$PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 \quad \text{dieses addirt}$$

$$FM^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$$

giebt

$$FM = x + \frac{1}{4}a.$$

Diese Linie FM ist also allemal gleich $AP + AF$, das ist, der Abscisse AP und der Ent-

Wie groß eine aus dem Brennpunkt an die Parabel gezogene Linie seye, u. s. w.

Entfernung des Brennpunkts vom Scheitelpunkt AF zusammen genommen; und eben so groß ist die Linie TF, und die Linie FH, wie wir im vierten Cap. beweisen werden, wenn wir von den Tangenten, Subtangenten und Subnormalen der krummen Linien reden, und den Beweis weit kürzer fassen können, als er sich jetzt ausdrücken liesse. Diß ist alles, was wir in dem gegenwärtigen Cap. von der Parabel sagen wollten. Denn daß es Parabeln von höhern Gattungen geben könne, ist ohne unser Erinnern klar. Die Fundamentalgleichung führt uns von selbst darauf; weil $ax = y^2$, so sieht man schon, daß die Potenz von a um eins geringer ist, als die von y; folglich wird $a^2x = y^3$ und $a^3x = y^4$ u. s. w. Demnach mit allgemeinen Ausdrücken $a^{m-1}x = y^m$. Ein solcher Ausdruck begreift das ganze Geschlecht der krummen Linien in sich, welche alle Parabeln genannt werden. (familia curvarum.) Dergleichen höhere Gattungen aber lassen sich durch in gegebenen Verhältnissen zu gleichende gerade Linien eben so construiren, wie die niedrigste, wie es Herr Baron von Wolf in den Actis Erud. gezeigt hat. Endlich begreift man auch, daß die Sache eben so wenig Schwürigkeit habe, wenn der concave Theil der Parabel gegen die innere gerade Linie, dergleichen die 71. Fig.

Was Parabeln von höhern Gattungen seyen;

und was man unter den Familien der krummen Linien versteht.

Tab. IV.
Fig. 71.

Was eine Pa-
rabola exter-
na sepe.

ausweist, befehret wird. Eine solche Gleichung heißt æquatio ad parabolam externam.

Erklärung
der Ellipsis,

warum sie so
heisse, wird
Tab. IV.
Fig. 68.

aus der Nas-
tur der Gleichung ge-
zeigt.

Ben der El-
lipsi kommen
zwo beständi-
ge Linien
vor.

Warum man
den Paramet-
ter der Ellip-
sis und Hy-
perbel mit ei-
nem andern
Buchstaben
als den Pa-
rameter der
Parabel be-
zeichne?

damit man
nemlich bey
den angenom-
menen Ge-
wohnheiten
der Algebra-
isten bleibe;

§. 192. Die Ellipsis ist eine solche krumme Linie, in welcher das Quadrat der Semiordinate oder PM^2 gleich ist dem Product des Parameters in die Abscisse, weniger dem durch die Ape dividirten Product des Parameters in das Quadrat der Abscisse. Und eben deswegen, weil von dem erstern Product etwas abgezogen wird, heißt diese krumme Linie eine Ellipsis; wie wir gezeigt haben. Die Gleichung ist wie bey der Parabel, was die Buchstaben betrifft; nur müssen wir erinnern, daß bey der Ellipsi und auch hernach bey der Hyperbel zwo beständige Linien, nemlich die Ape und der Parameter vorkommen. Nun wäre es gut, wenn man den Parameter, wie bey der Parabel, immer a , die Ape aber mit einem andern Buchstaben b genannt hätte. Die meiste Algebraisten aber und unter diesen besonders Herr Wolf nennen den Parameter hier b und die Ape a . Da wir nun keine Neuerung anfangen, und auch denjenigen Leuten nicht mißfallen wollen, welche aus den Wolfischen Schriften schon diese Lehre sich bekannt gemacht haben; so merken wir hier an, daß bey den elliptischen und hyperbolischen Figuren der Parameter allemal b und die Ape a heißet.

Demo

Demnach ist die Gleichung für die Ellipsis ^{Fundamen-}
in Buchstaben ausgedruckt, die folgende: ^{talgleichung}

$$y^2 = bx - \frac{bx^2}{a} \text{ das ist in der } \text{der Ellipsis;}$$

Figur, wenn wir nur den Buchstaben b
für den Parameter, den wir hier nicht
mehr wie in der Parabel, um nicht zu
weitläufig zu werden, ausdrücklich zeich-
nen, beibehalten:

$$PM^2 = b \cdot AP - \frac{b \cdot AP^2}{AB}.$$

Wenn nun ^{wie sie auf}
die Ase dem Parameter gleich ist, so ist ^{den Cirtel}
 $b = AB$, folglich ^{angewandt}

$$PM^2 = AB \cdot AP - \frac{AB \cdot AP^2}{AB} \text{ das ist } \text{werde, und}$$

$PM^2 = AB \cdot AP - AP^2$ oder schließl. ^{wieferne der}
cher ausgedruckt nach §. 60. ^{Cirtel eine}
^{Ellipsis sep.}

$PM^2 = (AB - AP) \cdot AP$. Welches die
Gleichung für den Cirtel ist; weil in die-
sem Fall die Proportion sich ergibt:

$$AP : PM = PM : AB - AP = PB.$$

das ist: $x : y = y : a - x$
folglich $y^2 = ax - x^2$, wie wir im er-
sten Capitel §. 162. gezeigt. Der Ciro-
kel ist also nichts anders als eine Ellipsis,
deren Ase und Parameter einerley sind.
Um aber wieder auf die Ellipse zu kom-
men, so siehet man leicht, daß diese krum-
me Linie nicht wie die Parabel ins unende-
liche fortgehet, sondern sich um ihre Ase

Wie man beweisen könne, daß die Ellipsis sich, wie der Kreis, zuletzt schließen müsse.

herumbewegt, und wie die Eirkelförmige schließet. Denn weil $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$, so

wird, woferne man $y^2 = 0$ setzt, auch
 $bx - \frac{bx^2}{a} = 0$ folglich, wenn man
 beiderseits $\frac{bx^2}{a}$ addirt

$$bx = \frac{bx^2}{a}$$

$$\frac{bx}{a} = x$$

$$abx = bx^2$$

$$\frac{abx}{bx} = \frac{bx^2}{bx}$$

$a = x$. Hieraus ist klar, daß die krumme Linie die Axe zweymal, nemlich in A und B schneiden müsse, weil sonst in dem Fall, daß $y^2 = 0$ die Abscisse oder x nicht AB oder a gleich werden könnte.

Warum eine Ellipsis zwei Axen, eine grössere und kleinere, habe? diese beiden Axen werden erklärt;

§. 193. Die Ellipsis hat zweyerley Axen, eine grosse und eine kleinere; die grössere ist AB, die größte gerade Linie, die von einem Punkt der krummen Linie zum andern gezogen werden kann; oder der größte Diameter ist die grössere Axe. (Axis major.) Wenn ich nun die grössere Axe in zween gleiche Theile in C theile, und die Perpendicularlinie oder Semior-
 dinate CD ziehe, so ist CD die Hälfte der kleinern Axe; welche gegen die andere Seite der Elliptischen Linie continuirt, die
 klei

kleinere Ase ganz glebt. In diesem Falle Tab. IV. ist nun die Abscisse $AC = \frac{1}{2}a$; daher die Fig. 68.

Gleichung für die kleinere Ase bald gefunden wird. Dann weil die Ellipsis überhaupt folgende Eigenschaft hat, daß

$$y^2 = bx - \frac{bx^2}{a} \text{ so darf man nur für die}$$

Abscisse x überall $\frac{1}{2}a$ substituiren; da sich dann ergibt

$$y^2 = \frac{1}{2}ab - \frac{\frac{1}{4}a^2b}{a} = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}ab.$$

Nun ist y in diesem Fall die Hälfte der kleinern Ase oder CD , folglich ist

$$CD^2 = \frac{1}{4}ab \text{ daher}$$

$$CD = \sqrt{\frac{1}{4}ab} = \frac{1}{2}\sqrt{ab.} \text{ und;}$$

$$2CD = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{ab} = \sqrt{ab.}$$

Das ist, die kleinere Ase $= CD$ ist die Quadratwurzel aus dem Product des Parameters in die grössere Ase; oder, weil $a : \sqrt{ab} = \sqrt{ab} : b$,

so ist die kleinere Ase die mittlere Proportionallinie zwischen der grössern Ase und dem Parameter.

§. 194. Nun wollen wir auch die Tab. IV. Weite des Brennpunkts von dem Scheitelpunkt der elliptischen Ase suchen. Der

Brennpunkt ist allemal da, wo die Semiordinate dem halben Parameter gleich ist. Er sey in F , so ist die Semiordina-

Die kleinere Ase ist die mittlere Proportionallinie zwischen der grössern Ase und dem Parameter.

Wie man den Brennpunkt

der Ellipse
finden und
bestimmen
können;

te $FN = \frac{1}{2}b$ und $AF = x$; folglich nach
der elliptischen Fundamentalgleichung

$$\frac{1}{4}b^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$$

$$\frac{1}{4}ab^2 = abx - bx^2$$

$$\frac{1}{4}ab = ax - x^2$$

Dahero auch, wenn
man beiderseits glei-
ches addirt und sub-
trahirt, oder die Zei-
chen verändert,

$$-\frac{1}{4}ab = -ax + x^2 \quad \text{eine unreine qua-} \\ \text{dratische Gleichung; folglich} \\ \text{addirt, giebt}$$

$$\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2, \text{dahero}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)} = \frac{1}{2}a - x \quad \text{und}$$

$$x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)}.$$

Wenn also $= b$, und die Ellipse ein
Kreis wird, so ist

$$x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2\right)} = \frac{1}{2}a.$$

Folglich fällt der Brennpunkt, wie es
auch die Erfahrung lehret, gerade in den
Mittelpunkt C. Ferner wird bey der El-
lipse die Distanz des Brennpunktes von
dem Mittelpunkt $C = CF = AC - AF =$
 $\frac{1}{2}a - x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)} =$
 $\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)}$ seyn; wie man aus der Fi-
gur leicht ersieht. Da es nun auf beyden
Seiten der Axe von C. aus zween derglei-
chen

chen Distanzen nemlich FC und fC giebt, Warum die so hat die Ellipsis zween Brennpunkte F und f, welche bey dem Cirkel in C zusammen fallen. Uebrigens fließet aus der Betrachtung der beeden Brennpunkte noch eine schöne Eigenschaft der Ellipsis, welche darinnen besteht, daß die Summe der beeden aus dem Brennpunkt F und f um einen Punkt der Peripherie gezogenen geraden Linien FM und fM allemal der größern Ase AB gleich seye. Eine Eigenschaft, die wir jezo beweisen wollen, wenn wir vorhero gezeigt haben, wie sich die Quadrate zweer Semiordinaten gegen einander verhalten.

§. 195. Man betrachte die zwe Semiordinaten PM, und CD, davon die letztere die Hälfte der kleinern Ase ist, und nenne sie y und v; die correspondirende Abscissen heisse man x und z; davon letztere = AC die Hälfte der größern Ase ist; so wird nach der Fundamentalgleichung seyn

$$y^2 = bx - \frac{bx^2}{a} \text{ und}$$

$$v^2 = bz - \frac{bz^2}{a}, \text{ folglich}$$

$$y^2 : v^2 = bx - \frac{bx^2}{a} : bz - \frac{bz^2}{a}$$

ten der Ellipse gezogenen geraden und an der Peripherie zu

y^2 :

sammen stoß
sender Linien
ist allemal ei
nerley oder
gleich groß,
und der größ
seren Ase
gleich,

$$\frac{y^2 : v^2 = abx - bx^2 : abz - bz^2}{y^2 : v^2 = ax - x^2 = az - z^2.}$$

Wenn man nun die in der Figur gezeichnete Linien dafür setzet, so hat man

$$PM^2 : CD^2 = AP \cdot PB : AC^2,$$

oder versetzt nach §. 80.

$$AC^2 : CD^2 = AP \cdot PB : PM^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}ab = ax - x^2 : y^2.$$

wird uns
ständig be
wiesen;

Nun wollen wir CD^2 anders ausdrücken. Man ziehe die aus dem Brennpunkt F bis an das Ende der kleinern Ase D eine Linie FD, so ist nach dem pythagorischen Lehrsatz $CD^2 = FD^2 - FC^2$, das ist, wenn man ihre Werthe §. 192. substituirt:

$$\frac{1}{4}ab = FD^2 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab.$$

Nun wollen wir sehen, was FD^2 ist; man subtrahire beiderseits $\frac{1}{4}ab$, so ist,

$$FD^2 - \frac{1}{4}a^2 = 0. \text{ Folglich wenn bees}$$

derseits addirt wird,

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2}{FD^2 = \frac{1}{4}a^2 \quad \text{und}} \\ FD = \frac{1}{2}a.$$

Demnach wird allemal die aus dem Brennpunkt der Ellipsis an das Ende der kleinern Ase gezogene Linie FD die Hälfte der größern Ase seyn; dahero läßt sich auch das Quadrat von DC, oder DC^2 ,
wenn

wenn man $FC = c$ setzt, folgender maßen ausdrücken: $DC^2 = \frac{1}{4}a^2 - c^2$.

Es ist also die Verhältniß

$$AC^2 : CD^2 = AP \cdot PB : PM^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - x^2 : PM^2$$

woraus sich PM^2 finden läßt

$$\text{nemlich } \frac{(\frac{1}{4}a^2 - c^2) \cdot (ax - x^2)}{\frac{1}{4}a^2} = PM^2$$

Weil ferner $FC = fC = c$ gesetzt wurde, so ist

$$PC = AC - AP$$

$$= \frac{1}{2}a - x$$

$$Pf = Cf + PC$$

$$= c + \frac{1}{2}a - x$$

$$PF = CF - PC$$

$$= c - \frac{1}{2}a + x, \text{ Folglich}$$

$$PF^2 = c^2 - ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx - ax + x^2$$

$$= (\frac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - ax + x^2$$

$$PM^2 = ax - x^2 - \frac{4c^2 x}{a} + \frac{4c^2 x^2}{a^2}$$

$$PF^2 + PM^2 = FM^2 = \frac{1}{2}(a - c)^2 + 2cx$$

$$- \frac{4c^2 x}{a} + \frac{4c^2 x^2}{a^2}$$

$$FM = \frac{1}{2}a - c + \frac{2cx}{a}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} Pf^2 &= c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 - 2cx - ax + x^2 \\ &= \frac{1}{2}(a+c)^2 - 2cx - ax + x^2 \end{aligned}$$

$$PM^2 = ax - x^2 - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$\begin{aligned} Pf^2 + PM^2 &= fM^2 = \frac{1}{2}(a+c)^2 - 2cx \\ &\quad - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2} \end{aligned}$$

$$fM = \frac{1}{2}a + c - \frac{2cx}{a}$$

$$\text{Da aber } FM = \frac{1}{2}a - c + \frac{2cx}{a}$$

$$\text{so ist } fM + FM = a = AB.$$

Dieses ist der Beweis derjenigen Eigenschaft der elliptischen Linie, daß nemlich alle aus den beiden Brennpunkten an einen Punkt der Peripherie gezogene gerade Linien zusammen genommen der größern Ase gleich seyen. Folglich sind die Summen aller auf diese Weise gezogenen Linien einander gleich; das ist $FM + Mf = FN + Nf$ u. s. w. und die Dreiecke FMf , FNf u. s. w. sind durchgehends so beschaffen, daß ihr Parameter, oder die Summe der drey Linien, durch welche sie beschloßen werden, immer gleich groß und einerley bleibt. Man siehet hieraus, daß sich leicht eine Ellipsis aus der gegebenen

be-

benen Eigenschaft bestimmen läßt. Ebenfalls erhellet aus dem gegebenen Beweise, wie man die sogenannten elliptische Sprachgewölbe erbauen müsse. Denn wenn eine Person in F und die andere in f steht, so werden alle Töne, die von F aus in den Punkten M, D, N, u. s. w. anstosen, nach f ihre Richtung bekommen; folglich wird derjenige Zuhörer, der in f steht, den Redner in F, wenn er auch gar nicht laut redet, am besten und besser als die näheren Zuhörer verstehen. Wir haben gesagt, daß man auch die Abscissen von dem Mittelpunkte zu zählen anfangen könne. Denn C ist der Mittelpunkt, folglich wird die davon gerechnete Abscisse $PC = x$ und $AP = AC - PC = \frac{1}{2}a - x$, hingegen $PB = PC + CB = \frac{1}{2}a + x$ seyn. Da sich dann die vorige Gleichung wieder ergibt. Oder wenn man $AC = r$ setzt, so ist $AP = r - x$ und $PB = r + x$ folglich $AP \cdot PB = r^2 - x^2$. Nennet man nun $CD = d$, so ist, weil

Einige praktische Folgen aus dem gegebenen Beweise.

$$CD^2 : AC^2 = PM^2 : AP \cdot PB$$

$$d^2 : r^2 = y^2 : r^2 - x^2$$

$$\text{folglich } r^2 \cdot y^2 = d^2 (r^2 - x^2)$$

$$\text{und } y^2 = \frac{d^2 \cdot (r^2 - x^2)}{r^2}$$

In welcher Gleichung die Abscissen von dem Mittelpunkte gerechnet werden.

Erklärung
der Hyper-
bel, und ihre
algebraische
Gleichung.

Tab. IV.
Fig. 67.

Was die
Zwerchaxe
sey;

Was der
Mittelpunkt,
oder centrum
hyperbolæ,
heisse;

und was
axis conju-
gatus seye.

Wie man den
Brennpunkt

§. 196. Die Hyperbel ist die letzte krumme Linie, welche durch die conische Sectionen entsteht. Ihre Gleichung ist $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$; das ist, in der Hyperbel ist das Quadrat der Semiordinate gleich dem Producte des Parameters in die Abscisse, und noch dem durch die Zwerchaxe dividirten Producte des Parameters in das Quadrat eben derselben Abscisse. Die Zwerchaxe heißt die Linie AB, welche von dem Scheitelpunkte der einen Hyperbel in den Scheitelpunkt der andern gezogen wird, indem, wie wir §. 186. gezeigt haben, die Axe einer jeden Hyperbel, wenn sie über den Scheitelpunkt verlängert wird, die gleichfalls verlängerte Seite des Kegels endlich schneiden muß; diese Linie heißt nun die Zwerchaxe, (axis transversus). Theilet man sie nun in zween gleiche Theile in C, so heißt C der Mittelpunkt davon. Wenn man endlich zwischen der Zwerchaxe und dem Parameter die mittlere Proportionalinie sucht, so wird die gefundene Linie die conjugirte Axe genannt. (axis conjugatus.) Nun läßt sich leicht der Brennpunkt in der Hyperbel finden. Nach der gegebenen Gleichung, weil die Semiordinate allemal in diesem Falle der halbe Parameter ist, wird seyn

$$\frac{1}{4}b^2$$

$$\frac{1}{4} b^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$$

$$: b$$

der Hyperbel,

finde;

$$\frac{1}{4} b = x + \frac{x^2}{a}$$

$$\cdot a$$

$$\frac{1}{4} ab = ax + x^2 \text{ eine quadratische un-}$$

reine Gleichung;
folglich

$$\frac{1}{4} a^2 = \frac{1}{4} a^2 \quad \text{addirt:}$$

$$\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} ab = \frac{1}{4} a^2 + ax + x^2$$

dahero

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} ab\right)} = \frac{1}{2} a + x \text{ demnach}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} ab\right)} - \frac{1}{2} a = x.$$

Da nun $\frac{1}{2}a$ die halbe Zwerchare oder die Distanz des Scheitelpunkts A von dem Mittelpunkte C ist: so wird die Distanz des Brennpunkts vom Mittelpunkt, wenn man nemlich $\frac{1}{2}a$ addirt, $= \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab\right)}$.

Wie man übrigens bey der elliptischen Linie bewiesen hat, daß die aus den beiden Brennpunkten an einen Punkt der Peripherie gezogene Linien der größern Axe gleich seyen; so läßt sich auf gleiche Weise darthun, daß bey zwey gleichen Hyperbeln, welche durch die Zwerchare in den Punkten A und B vereinigt werden, die Differenz zweyer solcher Linien, auch der Zwerchare gleich sey. Die Art des Beweises ist ganz gleich mit demjenigen,

den wir S. 193. vorgetragen haben ; daher wir auch disfalls nicht ohne Noth uns in Weitläufigkeiten einlassen wollen.

S. 197. Hingegen ist dasjenige bey dieser krummen Linie etwas neues , was von den Asymptoten gelehret wird. Wir wollen daher diese Materie kürzlich vortragen. Man beschreibe mit den Coordinaten PM, Pm durch den Scheitelpunkt A eine Parallellinie DE, und mache sie der conjugirten Ase dergestalten gleich , daß DA die halbe Ase und AE die andere halbe Ase wird ; hernach ziehe man aus dem Mittelpunkte C durch die Punkte D und E die Linien CD bis R u. s. w. wie auch die Linie CE bis r u. s. w. so werden CR und Cr die Asymptoten der Hyperbel werden. Den Ursprung dieses Namens wollen wir sogleich zeigen, wenn wir vorher einige andere Linien bestimmt haben. Aus der Proportionslehre wissen wir noch , daß

$$\text{CA} : \text{AE} = \text{CP} : \text{Pr}$$

und $\text{CA} : \text{AD} = \text{CP} : \text{PR}.$

$$\text{folglich ist } \text{Pr} = \frac{\text{AB} \cdot \text{CP}}{\text{CA}}$$

$$\text{und } \text{PR} = \frac{\text{AD} \cdot \text{CP}}{\text{CA}.$$

Weil aber $\text{AD} = \text{AE}$, indem diese Linien

Von den
Tab. IV.
Fig. 67.
Asymptoten
der Hyperbel ;

wie die
Asymptoten
gezogen wer-
den.

nien gleich gemacht worden sind : so ist,
wenn man gleiches für gleiches setzt, auch

$$PR = \frac{AE \cdot CP}{CA}. \text{ Wenn nun zwei Grössen}$$

einer dritten gleich sind, so sind sie einander
selber gleich; folglich ist $PR = Pr$.

Nun ist aber auch
nach der Natur der

Semiordinaten

folglich

das ist

$$\frac{PM = Pm}{PR - PM = Pr - Pm}$$

$$RM = rm.$$

Nun ziehe man ferner die Linie AI parallel
mit DC, so ist

$$EA : ED = AI : DC; \text{ nun ist}$$

$$EA : ED = \frac{1}{2} : 1 \quad \text{folglich}$$

$$AI : DC = \frac{1}{2} : 1$$

$$\text{das ist, } AI = \frac{1}{2} DC.$$

$$\text{Und weil } DC = CE, \text{ so ist } AI = \frac{1}{2} CE.$$

$$\text{ferner ist } EA : AD = EI : IC.$$

$$\text{Nun ist } EA : AD = 1 : 1.$$

$$\text{Dahero } EI : IC = 1 : 1, \text{ das ist}$$

$$EI = IC = \frac{1}{2} CE.$$

$$\text{Es ist aber auch } AI = \frac{1}{2} CE.$$

$$\text{folglich } EI = CI = AI.$$

Nun heisset man das Quadrat der Linie
AI oder CI die Potenz der Hyperbel;
sie wird sich also leicht aus den beiden

§ 18 Geom. III Cap. Von Kegelschnitt.

Was die Po-
tenz der Hy-
perbel sey.

Arten bestimmen lassen. Denn $CA = \frac{1}{2}a$
und AE die andere halbe Ase wollen wir
 $\frac{1}{2}c$ nennen. Da nun nach dem pythagor-
aischen Lehrsatz $CE^2 = CA^2 + AE^2$

$$= \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2$$

so ist $CE = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2}$
und $\frac{1}{2}CE = CI = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2}$

folglich $CI^2 = \frac{a^2 + c^2}{16}$, das heißt, die

Potenz der Hyperbel ist der sechszehende
Theil von der Summe der Quadrate der
beiden Axen; oder weil $c^2 = ab$, indes-
me, nach der gegebenen Erklärung, die-
se Ase die mittlere Proportionallinie zwi-
schen der Zwerchase a und dem Parameter
 b , folglich \sqrt{ab} ist, daher ihr Quadrat
 ab heißt; so wird $CI^2 = \frac{a^2 + ab}{16}$
 $= \frac{(a + b)a}{16}$.

Wie man be-
weise, daß die
Tab. IV.
Fig. 67.
Asymptoten
der Hyperbel
niemalen mit
der krummen

§. 198. Nun wollen wir auch noch
sehen, wie groß die Differenz der zwey
Quadrate PM^2 und PR^2 sey, ob sie nem-
lich beständig und unveränderlich bleibe,
oder ob sie nach und nach vermindert und
zulezt $= 0$ werden könne. DA ist $\frac{1}{2}DE$,
folglich, wie wir gezeigt haben $= \frac{1}{2}\sqrt{ab}$,
das ist $DA = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$; $CA = \frac{1}{2}a$,
 $CP = \frac{1}{2}a + x$, wenn $AP = x$, folglich
wird nach den Proportionsregeln seyn:

CA

CA: AD = CP: PR das ist

$$\frac{1}{2}a : \sqrt{\frac{1}{4}ab} = \frac{1}{2}a + x : PR.$$

Demnach

Linie selbst
zusammen

$$PR = \frac{(\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}ab} + x\sqrt{\frac{1}{4}ab})}{\frac{1}{2}a}$$

das ist, wenn

fallen, wenn

man wirklich

sie auch

dividirt,

gleich noch

$$PR = \sqrt{\frac{1}{4}ab} + \frac{2x\sqrt{\frac{1}{4}ab}}{a},$$

folglich qua-

so weit forts

dirt,

gezogen wer

$$PR^2 = \frac{1}{4}ab + bx + \frac{bx^2}{a}$$

den;

$$PM^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$$

$$PR^2 - PM^2 = \frac{1}{4}ab.$$

Also ist die

Differenz dieser zwey Quadrate beständig und immer einerley: darum kann es nicht geschehen, daß jemals die Differenz null werde; weil sonst die Zwerchare und der Parameter auch null werden müßten. Ist aber dieses nicht möglich, so kann auch RM niemalen nulle werden, weil sonst $PR^2 - PM^2 = PM^2 - PM^2$ das ist, wirklich null würden. Demnach wenn auch die Linien AM und CR ins unendliche fortgezogen würden, so müßte doch MR immer noch eine positive Zwischenweite bleiben; weil sonst die Differenz der beeden Quadrate PR^2 und PM^2 folglich auch $\frac{1}{4}ab = 0$ würde, welches unmöglich ist. Folglich kommen die beede Linien, nemlich die gerade CR und die krumme AM einander immer näher, und doch

Ursprung des
griechischen
Namens
Asymptote;

Wie ferne Hr.
v. Leibniz die
endliche Geis-
ter Asym-
ptoten von
Gott ge-
nannt habe.

Was eine
gleichseitige
Hyperbel seye.

fallen sie niemalsen zusammen, indeme immer noch eine Entfernung zwischen beiden bleiben muß. Nun begreift man die Ursache, warum die griechische Mathematiker die Linie CR eine Asymptote von der Hyperbel AM genannt haben. Denn eine Asymptote ist eine solche Linie, die einer andern Linie sich immer nähert, und doch niemalsen mit ihr sich vereinigt oder zusammenfällt. Aus diesem Grunde hat der Herr von Leibniz die endliche Geister Asymptoten von Gott genannt; ein Gedanke, welcher in der That nicht nur wichtig, sondern auch gründlich ist.

Bei der Hyperbel haben wir die einige Frage noch zu erörtern: was ihre Gleichung sey, wenn die Hyperbel gleichseitig (*hyperbola æquilatera*) wäre? Die Erklärung einer solchen Hyperbel wird uns sogleich auf ihre Eigenschaften führen. Wenn die beide Axen einander gleich sind, so ist die Hyperbel gleichseitig. Folglich wird nach den §. 194. gegebenen Erklärungen $a = \sqrt{ab}$, und $a^2 = ab$, daher wenn man beiderseits mit a dividirt, $a = b$; also sind in einer solchen Hyperbel die beide Axen und der Parameter einander gleich. Da nun die Fundamentalgleichung für alle Hyperbeln ist

$$y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}, \text{ so wird für die gleich-}$$

seitige, worinnen $a = b$ heraus kommen,

$$y^2$$

$$y^2 = ax + \frac{ax^2}{a} = ax + x^2.$$

Wenn man endlich die Abscissen in einer der Asymptoten annimmt, und von dem Was eine nach Belieben angenommenen Punkte mit Hyperbel der andern Asymptote eine Parallellinie zwischen den bis an die krumme Linie (ad hyperbolam Asymptoten externam) zieht, welche die Semiordi- Asymptoten nate vorstellt: so hat man eine Hyperbel lege. zwischen den Asymptoten, (hyperbolam intra asymptotos) in welcher $xy = ab$; wenn nemlich x die in den Asymptoten genommene Abscisse, und y die Semior- dinata ad curvam externam bedeutet. Das ist nun alles, was wir von den conischen Sectionen sagen wollten; wir betrachten daher jetzt auch einige andere krumme Linien.

§. 199. Wir haben in dem ersten Von andern Capitel gezeigt, daß sich eine Menge von krummen Linien gedenken lasse; doch sind nien, welche den wir nicht für nöthig, selbige umständ- nur ange- lich zu beschreiben. Die Radlinie, das zeigt und ge- ist griechisch die Trochois oder Cyclois, welche beschrieben wird, wenn sich ein nennt wer- Rad um seine Ase herum bewegt, und den, durch diese Bewegung sich wirklich fort- wälzt, hat in der Mechanik ihren beson- dern Nutzen. Wir dürfen sie also hier übergehen; um so mehr, da sie und noch andere genannte und ungenannte krum-

Warum man sie nicht umständlich beschreibe?

me Linien von höhern Gattungen sind, und nicht wie die conische Sectionen behandelt werden können. Eben so würden wir unserm vorgesetzten Zweck entgegen handeln, wenn wir die Cisso's, die Conchois, die verschiedene Quadratrices, die Spiral und andere krumme Linien umständlich beschreiben wollten. Eine aber ist noch übrig, deren Eigenschaften eine Aufmerksamkeit verdienen; nemlich die Logistit, oder die logarithmische Linie.

Was die Logistit oder logarithmische Linie sey, und warum von dieser
Tab. IV.
Fig. 69.

vorzüglich behandelt werde.

Die Abscissen der Logistit sind die Logarithme der correspondirenden Semiordinaten,

Wenn man eine gerade Linie nach Belieben in so viel gleiche Theile theilet, als man will, und aus den Theilungspunkten A, P, N, u. s. w. die Linien AB, PM, NQ in einer continuirlich = geometrischen Verhältniß folglich dergestalten beschreibet, daß $AB:PM=PM:NQ$ u. s. w. so wird die krumme Linie B M Q die logarithmische Linie genannt. Wenn ich nun die Linien AP, AN u. s. w. Abscissen nenne, so werden AB, PM, NQ u. s. w. ihre Semiordinaten seyn. Folglich sind die Abscissen in diesem Falle die Logarithme der Semiordinaten. Denn wenn man von unten anfängt, und z. E. die erste Semiordinate 2, die andere 4, die dritte 8, die vierte 16 ist, u. s. w. so geben die Semiordinaten folgende geometrische Progression:

2, 4, 8, 16, 32 u. s. w.

die

die Abscissen

aber diese 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w.

Folglich sind die Abscissen der Logarithme ihrer Semiordinaten: wenn also eine Semiordinate y und die andere z ist, so werden ihre Abscissen ly und lz heißen. Man wird diese Erklärungen im folgenden Capitel wieder gebrauchen, daher man billig darauf zu merken hat. Aus dem bisherigen sehen wir zugleich, daß die Linie AT , man mag sie verlängern, so weit man will, mit der krummen Linie BMQ nicht zusammen falle, folglich ihr Asymptot seyn. Denn wenn eine Semiordinate $PM = 0$, so wird $AB:PM = 1:0$, das ist unendlich groß werden: folglich müßte auch AP die Abscisse davon unendlich lang seyn; wie man unter andern auch aus der Lehre von den unendlichen Progressionen in Brüchen ersehen kann.

Wie ferne man durch die Logistil eine Asymptote habe;

§. 200. Es ist noch übrig, daß wir von den geometrischen Orten handeln. Wie es in der Arithmetik unbestimmte Aufgaben giebt, so giebt es auch solche in der Geometrie. Eine Linie, durch welche eine unbestimmte Aufgabe aufgelöst wird, heißt ein geometrischer Ort. Da es nun gerade und krumme Linien giebt, so werden sich die geometrische Orte auf einer doppelten Seite betrachten lassen. Diejenige geometrische Orte, welche durch eine

Von geometrischen Orten;

Erklärung dieser Benennung;

Das
 loca plana

eine gerade Linie oder auch durch den Kreis konstruirt werden; hieß man vor Zeiten loca plana (flache Derter). So ist

z. E. $y = \frac{2x}{b}$ eine Gleichung für einen flachen

Tab. II.
 Fig. 39.

then Ort: denn wenn $CD = b$, $DE = a$, und $CA = x$, so ist $AB = y = \frac{CA \cdot DE}{CD}$

und $= \frac{2x}{b}$ weil $CD : DE = CA : AB$, die Auf-

loca solida
 seyen;

gabe ist aber unbestimmt, denn alle mit DE parallelgezogene Linien werden diese Gleichung auflösen. Wenn aber der geometrische Ort durch eine Parabel oder Ellipse oder Hyperbel u. s. w. konstruirt werden muß, so heißt er locus solidus (ein körperlicher Ort). Z. E. wenn man verlangt, man solle ein Dreieck machen, von derjenigen Beschaffenheit, daß die Summe seiner drei Seiten der Summe der drei Seiten des gegebenen Dreiecks vollkommen gleich sey; so wird diese unbestimmte Aufgabe durch einen geometrischen Ort an der Ellipsis bestimmt, wie man aus S. 193. leicht ersehen wird. Das ist der allgemeine Begriff von den geometrischen Dertern. Nun sieht man wohl, daß es unendlich viel Fälle gebe, in welchen dergleichen Aufgaben vorkommen. Wenn man aber nur im Stande ist, aus einer Gleichung zu urtheilen, wo

wohin sie gehöre, ob sie, wie wir gezeigt, zur Parabel, zur Ellipsis oder zur Hyperbel zu rechnen sey: so wird man die verschiedenen Ausdrücke der Gleichungen unter gewisse Hauptgattungen bringen können. Es giebt aber auch neben dem solche Aufgaben, in welchen die unbekannte Größen mehr als zwei Ausmessungen haben; da dann freylich die conische Sectionen zur Construction des Problems nicht zureichend sind. Wie man es in geometrischen Ort, wo mehr als zwei Ausmessungen vorkommen, construiren solle; und dergleichen zweyerley krumme Linien verbinden müsse. Allein man hilft sich in diesem Falle mit Verbindung zweyer krummen Linien, entweder des Circels und der Parabel, oder des Circels und der Ellipsis, oder des Circels und der Hyperbel u. s. w. Newton hat die Vereinigung des Circels mit der Ellipsis, Baker aber, von dem man die sogenannte Centralregel hat, die Verbindung des Circels und der Parabel ange- Tab. IV. Fig. 72. rathen. Um nun unsern Lesern einen Begriff davon zu geben, so wollen wir zwei krumme Linien AMB und DMN miteinander verbinden: aus M, wo sie sich durchschneiden, ziehe man die Semiordinate MP auf die Linie AP herab; nun sey in der Linie AMB die Abscisse $x = y^2 + \beta$ und in der Linie DMN $x = \gamma(y^2 + y\gamma)$

so ist §. 9. $y^2 + \beta = \gamma(y^2 + y\gamma)$
 folglich quadriert $y^4 + 2\beta y^2 + \beta^2 = y^4 + y\gamma$
 und auf null reducirt $y^4 + (2\beta - 1)y^2 - y\gamma + \beta^2 = 0.$

Hiers.

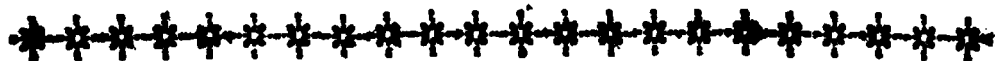
Hieraus siehet man nun die Möglichkeit ein, daß durch dergleichen Durchschnitte auch Gleichungen von mehreren Dimensionen construirt werden können. Wir

Warum man
diese Lehre
nicht un-
ständig vor-
trage,

nach warum
sie in der
Ausübung
nicht ge-
braucht werde?

halten uns aber damit nicht auf. Herr Baron von Wolf hat viele Exempel in seinen Elementis davon gegeben. Dem ungeachtet schreibt er T. I. Elem. lat. §. 608. Elem. Analys. p. 510. geometricas æquationum constructiones nullius fere in praxi esse usus; cum eidem satisfaciat methodus extrahendi radicem per approximationem. &c. Wir haben daher in den bereits gegebenen Bestimmungen das nöthigste gesagt. Die geometrische Constructionen der Gleichungen haben fast gar keinen Nutzen in der Ausübung: man sucht eben die Wurzeln durch die Approximation; und daran hat man hernach genug. Denn obschon die Kräfte des Verstandes und besonders die Erfindungskunst durch dergleichen Constructionen erhöht werden können: so glauben wir doch, daß die bisherigen Lehrsätze nach dem uns vorgesezten Zwecke schon hinlänglich seyen, die Seelenkräften im Nachdenken zu üben, und die Liebhaber der gründlichen Wissenschaften zu vergnügen. Wir dürfen daher auch dieses Capitel, ohne was nöthiges übergangen zu haben, nunmehr beschließen.

Beschluß die-
ses Capitels.



Vierres Capitel.

Von der Fluxionenrechnung oder von der Kunst zu differenz- tiiren und zu integriren.

§. 201.

Man kann die Fluxionenrechnung nach der Bedeutung des Namens, den die Engländer dieser Rechnung geben, am besten dadurch beschreiben, wann man sagt: sie bestehe in der Kunst die Geschwindigkeit zu finden, mit welcher sich eine gegebene Figur verändert. So richtig dieser Begriff ist, so schwer scheint er besonders für Anfänger zu seyn. Wir wollen uns daher bemühen, ihn auf der leichtesten und faßlichsten Seite vorzutragen. Der große Analyste, Mac-Laurin, welcher als ein zweyter Archimedes die Schottländische Festung Edinburg wider die mißvergnügte Schotten im Jahr 1746. vertheidigte, und überhaupt durch seine gemeinnützige Arbeiten und Schrifften sich einen unsterblichen Ruhm erworben, hat uns zu dieser Erklärang in seinem vortrefflichen Buch unter dem Titel: *Treatise of fluxions*, Anleitung gegeben. Man betrachte

Wie man sich die Fluxionenrechnung am gründlichsten vorstellen?

Tab. I.

Fig. I.

und wie man diese Vorstellung den Ausgängern zu lieb, wenn sie auch keine Mechanik verstehen, in einen faßlichen Vortrag einfleiden könne;

und wie diese ganze Lehre von dem Begriffe der Geschwindigkeit, mit welcher sich eine Figur verändert, abhänge.

trachte das Viereck $ABCD$, und setze $AD = x$, $DC = y$; vx bedeute die Geschwindigkeit des Punktes D , bey Beschreibung der Linie AD ; und vy die Geschwindigkeit des Punktes C , indem er die Linie DC beschreibt. Nach Verfließung einer willkührlichen Zeit, die endlich seyn mag, sey aus AD Ai , und aus DC Df oder ig geworden. Jetzt suche man die Geschwindigkeit, mit welcher das ganze Rectangulum sich verändert hat; das Rectangulum selbst heißt $AD.DC = xy$. Nun fragt man: wie geschwinde $DC = y$ fortrücken müsse, daß die Gleichheit immer bleibe, oder daß in unendlich kleinen Zeittheilen wie in größern das wachsende Rectangulum AC sich immer ähnlich bleibe? so wird man antworten: mit der Geschwindigkeit des Punktes $D = vx$; eben so wird sich die Linie $AD = BC = x$, die sich zu Erhaltung der Aehnlichkeit nach e bewegt, mit der Geschwindigkeit des Punktes $C = vy$ bewegen müssen. Demnach ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich das ganze Rectangulum verändert, $= v(xy) = y.vx + x.vy$. Denn wenn sich diese beide Linien mit einer andern Geschwindigkeit bewegten, so würde die eine früher oder später als die andere an den Ort und Stelle, wohin man sie haben will, kommen; folglich die Aehnlichkeit, welche auch in dem kleinsten Zeitpunkt

punkt der Veränderung erhalten werden
 muß, unterbrochen werden. Wenn sich auch bey dies
 aber AD mit der Geschwindigkeit von DC, sem Begriff
 und DC mit der Geschwindigkeit AD, das nicht nöthig
 ist x mit der Geschwindigkeit von y, und y habe, etwas
 mit der Geschwindigkeit von x bewege, so als unend-
 bleibt das Rectangulum immer sich selbst lich klein an-
 gleich, und dem noch nicht veränderten zusehen oder
 in einem jeden Zeitpunkte der Verände- gar für ein
 rung ähnlich; demnach ist die Geschwin- absolutes
 digkeit, mit welcher sich das Rectangulum nichts zu
 xy verändert, $xvy + yvx$, ohne daß halten.
 man nöthig hätte, etwas entweder als
 unendlich klein anzusehen, oder wegzu-
 werfen, oder gar für ein absolutes Nichts
 zu halten. Wären die Linien AD und
 DC einander gleich, so ist $x = y$, folg-
 lich $xy = x^2$, daher in diesem Fall die
 Veränderung des Quadrats, $xvx +$
 $xvx = 2xvx$ u. s. w. Nun hat man
 in Deutschland den Raum, der sich mit
 dieser Geschwindigkeit verändert, nicht
 mit dem Buchstaben v sondern d ausge-
 druckt, und eine Differentialgröße genannt:
 daher $xvy + yvx$ bey uns ausgedruckt
 wird durch $xdy + ydx$; und $2xvx$
 heißt $2xdx$ u. s. w. Den Ursprung dies-
 ser Benennung und des Differentialna-
 mens wollen wir sogleich zeigen.

Großer Vor-
 theil dieser
 Bezeichnung
 nebst
 ihrer Anwen-
 dung auf die
 Rechnung
 selbst.

§. 202. Bey einzelnen Größen, die
 nicht multiplicirt oder dividirt werden, hat
 die

die Sache gar keine Schwierigkeit: denn die Geschwindigkeit, mit welcher sich eine Linie $AD = x$ bewegt, ist eben $v x$. Größen, welche durcheinander dividirt werden, reducirt man auf die Multiplication; folglich wird man den Grund der ganzen Fluxionenrechnung verstehen, wenn man das, was wir §. 201. vorgetragen haben, sich gründlich bekannnt macht. Wir wollen aber jetzt die gewöhnliche und in Deutschland eingeführte Methode, wie man diese Rechnung ansieht, kurzlich erzehlen. Man sagt, es wachsen einer veränderlichen Linie, wenn sie grösser wird, immer unendlich kleine Theile an; oder wenn sie kleiner wird, so nehmen sie um solche unendlich kleine Theile ab. Einen solchen unendlich kleinen Theil nennt man das Differentiale von x, y , u. s. w. nemlich dx, dy . Nun wollen wir die um den unendlich kleinen Theil Di vermehrte Linie $AD + Di$ nennen $x + dx$, und die um Cf vermehrte Linie DC heissen wir aus gleichem Grunde $y + dy$: diese zwei Größen sollen nun miteinander multiplicirt werden; da es dann nach den Regeln geht, indem

$$\begin{array}{r} x + dx \\ y + dy \\ \hline xy + ydx + xdy + dxdy. \end{array}$$

Dieses Product ist erstlich das Rectangulum

Wie man diese Rechnung in Deutschland vortrage,

und was Differentialgrößen heißen.

Tab. I.
Fig. I.

Erklärung der bey uns angenommenen Lehrart.

gulum ADCB = AD . DC = xy; ziehe ich also ab, weil ich nur zu wissen verlange, um wie viel es verändert worden sey: folglich bleibt, nach Abzug des Rectanguli xy, übrig $ydx + xdy + dxdy$; das aber, was in der Subtraction übrig bleibt, heißt man die Differenz. Darum nennen die Deutschen diese Rechnung eine Differentialrechnung; und $ydx + xdy + dxdy$ heißt daher die Differentialgröße von xy. Weil aber $dxdy$, welches das kleine Viereck chgf ist, gegen BCfe = $x dy$ und DChi = $y dx$ unendlich klein und wie nichts zu rechnen ist, so wirft man auch dieses hinweg, und sagt, die Differentialgröße von xy ist $x dy + y dx$. Nun lasse ich vernünftigen Lesern das Urtheil über das weggeworfene $dxdy$ selbst über; wenn sie die Figur ansehen, so werden sie sagen, die Differenz zwischen dem veränderten und noch nicht veränderten Rectangulo sey BefC + fghC + DChi, und nicht allein BefC + DChi; oder blos $ydx + xdy$. Das Viereck C fgh mag noch so klein seyn, als es will, so ist es doch etwas, das die so accurate Meßkünstler nicht wegwerfen sollten; will man es aber behalten, so gibt es in der Rechnung nicht nur Schwierigkeiten, sondern es würde auch manches falsches herauskommen, welches vermieden wird, wenn man das

Warum man diese Rechnung eine Differentialrechnung heiße.

Einige Schwierigkeiten, die einem bey der gemeinen Erklärung billig einfallen müssen, werden kürzlich vorgetragen, da dann das Urtheil dem vernünftigen Leser überlassen wird, ob er lieber der englischen oder deutschen Erklärungsart dißfalls beypflichten wolle.

$dx dy$ wegwirft. Die Sache hat also an und vor sich selbst ihre Richtigkeit und hält die Probe; nur ist die Art und Weise, wie man sie erklärt, nicht die beste. Einige haben daher das dx und dy für absolute Nullen angesehen; in welchem Fall ich freylich $dx dy$ wegwerfen muß, weil nulle mal nulle allemal nichts ist: allein ich müßte in diesem Fall auch $y dx$ und $x dy$ wegwerfen, weil nulle mal y so gut nichts ist als nulle mal nulle. Allen diesen Einwendungen entgeht man glücklich, wenn man dasjenige, was ich §. 201. gesagt habe, bey dieser Materie zu Grund legt, und die Differentialien als die Geschwindigkeiten ansieht, mit welchen sich eine Grösse verändert. Die Sache ist so überzeugend, als irgend ein Beweis seyn kann. Ueberhaupt werden die Maclaurinische Schriften, mit welchen mich der berühmte Herr Prof. Kästner bekannt gemacht hat, allen denjenigen ein Genüge leisten, welche auch diese Rechnung gründlich verstehen wollen. Inzwischen werden wir künftighin die in Deutschland eingeführte Namen beybehalten, und statt Fluxionen: immer Differentialrechnung sagen; nur muß man, wie wir gezeigt, den Grund von der Richtigkeit dieser Rechnung aus dem mehrmalen angeführten §. voraussetzen, und sich recht bekannt machen.

Warum man die unendlich kleine Theile nicht als absolute Nullen ansehen könne;

und wie man allen Einwendungen bey der Geometrie der Engländer entgehe.

Warum man aber nichts desto weniger die in Deutschland eingeführte Namen und Zeichen beybehalte.

§. 203. Nunmehr können wir die Anwendung der Differentialkunst auf die vier Rechnungsarten anwenden. Es gibt veränderliche und unveränderliche Größen. Je-
 ne allein kann man differenziren, weil Differenziren eigentlich nichts anders ist, als anzeigen, daß und wie eine GröÙe verändert worden sey. Von einer unveränderlichen GröÙe kann ich also nicht sagen, daß oder wie sie verändert werde, weil sie unveränderlich ist. Das heißt, ihr Differentiale ist nichts: z. E. das Differentiale vom Parameter ist nichts, oder der Parameter hat kein Differentiale, oder auch der Parameter kann weder gröÙer noch kleiner werden. In diesem Verstande sagt man, die Differentialen der beständigen und unveränderlichen GröÙen seyen Nullen; nicht als ob die GröÙe selbst in Null verwandelt wäre, sondern weil sie wirklich keine Fluxion hat, und, wenn ich ihr eine zuschreiben wollte, sie wirklich $= 0$ wäre. Diesemnach ist das Differentiale von $a = da = 0$, weil man bekannter massen die beständige Linien durch die erstere Buchstaben des Alphabets ausdrückt. Solche beständige Linien sind nun die Radii eines Kreises, der Diameter, der Parameter in den conischen Sectionen, die Axen in den Ellipsen und Hyperbeln u. s. w. deren Differential jedesmal $= 0$. Hingegen die Abscissen, die

Anwendung der Differentialkunst auf die vier Rechnungsarten

Warum und wie ferne das Differentiale einer unveränderlichen GröÙe nulle oder nichts seye?

eine Benennung, welche von allen Mißdeutungen gerettet wird.

Was dergleichen beständige oder unveränderliche GröÙen, und was die veränderliche seyen, wird angeführt.

Semiordinaten u. s. w. sind lauter veränderliche Linien, welche folglich sich differenziren lassen, und deren Differentialgrößen wirkliche Größen sind. Wenn also die Abscisse x heisset, so ist ihr Differentiale dx , und die Semiordinate y hat zum Differentiale dy . Sollte man demnach $x + y$ differenziren, so hiesse es eben $dx + dy$, und $x - y$ wird differenzirt $dx - dy$ heißen; $x + a$ heißt differenzirt $dx + 0 = dx$; ferner $x + a - z$ gibt differenzirt $dx + 0 - dz = dx - dz$. u. s. w.

Von Differenzirung derjenigen Größen, die addirt und subtrahirt werden.

Wie man die miteinander multiplicirte Größen differenzirt;

Bei der Multiplication haben wir schon gezeigt, wie man zu Werke gehe, als welches der einige Fall ist, der schwer scheint; alle Schwierigkeiten aber verlihren sich auf einmal, wenn man die Maclaurinische Erklärung genau überdenkt, und einsiehet, daß das Rectangulum xy differentirt wird, wenn man x in die Geschwindigkeit von y , die wir dy nennen, und y in die Geschwindigkeit von $x = dx$ multiplicirt, und die beide Partialproducte addirt. Also ist $xy = x dy + y dx$; $xz = x dz + z dx$, $tu = t du + u dt$ u. s. w. Man multiplicirt nemlich einen jeden Factor in das Differentiale des andern, und addirt die Partialproducte. Auf diesen Fall wird nun auch die Differenzirung dreier Factorum reducirt, da man je zween und zween in das Differentiale des dritten

Allgemeine Regel bey der Multiplication.

muss

multiplirt. 3. E. man solle xyz differenziren. Nun setze man

$$xy = t \quad \text{so ist}$$

$$\frac{d}{dt} \cdot z$$

$$xyz = tz \quad \text{folglich}$$

$$d(xyz) = t dz + z dt$$

Nun ist $x dy + y dx = dt$

folglich

substituiert $d(xyz) = t dz + xz dy + yz dx$

und weil $t = xy$

$$d(xyz) = xy dz + xz dy + yz dx.$$

Wenn daher vier Factores vorkämen, so werden je drey und drey allemal in das Differentiale des vierten multiplirt u. s. w.

§. 204. Die umständlich bewiesene Regel, multiplirte Größen überhaupt zu differentiren, wird uns nun auch bey der Differentiation der Potenzen zu statgen kommen. Wenn ich xx differenzire, so bekomme ich $xdx + xdx = 2 xdx$. Differenzire ich xxx , so habe ich $xxdx + xxdx + xxdx = 3 xxdx = 3 x^2 dx$; folglich wird x^4 differentirt geben $4x^3 dx$, x^5 gibt $5x^4 dx$ u. s. w. Man multiplicirt also das Differentiale der ersten Potenz in das Product des Exponenten und der gegebenen Potenz, deren Exponent aber um eins vermindert wird. Denn aus den gegebenen Exempeln erhellet, daß

Von der Differentiation der Potenzen, und wie sich diese auf die Multiplicationsregel reduciren lasse.

Allgemeine Regel für diesen Fall;

samt dem
Beweis.

die Differentialgröße einer Potenz entstehe, wenn man den Exponenten der Potenz um eins vermindert, und sodann diese erniedrigte Potenz mit dem Differentiale ihrer ersten Dignität multiplicirt, und das ganze Product nochmalen mit dem unverminderten Exponenten multiplicirt.

Anwendung Demnach ist das Differentiale von $x^m = mx^{m-1}dx$, und das Differentiale von

ne Exempel, $x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m-1}{n}} dx = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} dx$; wenn man

nemlich $\frac{m}{n} - 1$ unter einerley Benennung bringt nach §. 67. Ferner weil die

Wurzeln allemal in Dignitäten verman- delt werden, deren Exponenten Brüche sind, §. 58. so wird das Differentiale

von $\sqrt[m]{x^n} = \text{Diff. von } x^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n-1}{m}} dx$

$= \frac{n}{m} x^{\frac{n-m}{m}} dx$. Eben so ist $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

besonders, und
auch auf die
Wurzelgrößen.

folglich sein Differentiale $\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} dx =$

$\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx$. Weil ferner $x^{\frac{1}{2}}$

$= x^{-1}$, $x^{\frac{1}{3}} = x^{-2}$, $x^{\frac{1}{4}} = x^{-3}$ und d.

berhaupt $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$, so ist das Differen-

tiale von $\frac{1}{x}$ oder $x^{-1} = -1 \cdot x^{-2} dx = -$

$\frac{1}{x}$.

$x^{-2} dx$; das Differentiale von $\frac{1}{x^2}$ oder

$x^{-2} = -2 x^{-3} dx$, und überhaupt das

Differentiale von $\frac{1}{x^m}$ oder $x^{-m} = -$

$m x^{-m-1} dx$. Endlich da auch $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

$= x^{-\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$ so wird

das Differentiale von $\frac{1}{\sqrt{x}}$ oder $x^{-\frac{1}{2}} =$
 $-\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} dx = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} dx = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} dx;$

und das Differentiale von $\frac{1}{\sqrt[m]{x}} = x^{-\frac{n}{m}}$ oder $x^{-\frac{n}{m}}$
 $= -\frac{n}{m} x^{-\frac{n}{m}-1} dx = -\frac{n}{m} x^{-\frac{n+m}{m}} dx.$

§. 205. Wie nun alle diese Gleichungen aus der einzigen Regel, ein Product zu differenziren, hergeleitet werden: so werden wir nun auch aus eben dieser Regel lernen, wie man Grössen differenzirt, da von eine die andere dividirt. Es seye $\frac{x}{y}$ ganz reducirt zu differenziren.

Wie man Grössen, da von eine die andere dividirt, differenzirt; und wie auch diese Kunst auf die Multiplicationsregel ganz reducirt werde;

Wir wissen aus dem ersten Theil noch, daß $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$, und weil allemal $\frac{1}{y} = y^{-1}$, so ist $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}.$

Diesen Ausdruck können wir nun leicht nach der Multiplicationsregel differenziren. Das Differentiale von x ist dx , und das von y^{-1} ist $-1 \cdot y^{-2} dy = -y^{-2} dy$; folglich heißt das Differentiale des ganzen Products $y^{-1} dx + x \cdot -y^{-2} dy = y^{-1} dx - xy^{-2} dy = d, \frac{x}{y}$. Nun ist y^{-1}

$= \frac{1}{y}$ und $y^{-2} = \frac{1}{y^2}$; wenn man nun gleiches für gleiches substituirt, so heißt die obige Gleichung

$$\frac{1}{y} dx - \frac{xdy}{y^2} = \frac{dx}{y}$$

$$-\frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx}{y^2} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2} =$$

Diff. $\frac{x}{y}$. Wenn man also das Differen-

tiale der zu dividirenden Zahl mit dem Divisor multiplicirt, und von dem Producte das mit der zu dividirenden Zahl multiplicirte Differentiale des Divisors subtrahirt, und den Rest durch das Quadrat des Divisors multiplicirt, so hat man zwei einander dividirende Größen differenzirt; folglich kann man auch alle Brüche differenziren, weil zwei einander dividirende Größen nichts anders als ein Bruch sind. Ein Bruch wird daher differenzirt, wenn man das Differentiale des Zehlers mit dem Nenner multiplicirt, und hernach das mit dem Zehler multiplicirte Differentiale des Nenners davon subtrahirt,

Von der Differentiation der Brüche, welche auf gleichem Grunde beruhet.

hirt, hernach alles mit dem Quadrate des Nenners dividirt.

§. 206. Nunmehr werden unsere Leser überzeugt seyn, daß die ganze Kunst auf die Differentiirung des Rectanguli xy ankomme, und daß man alle mögliche Größen differentiliren könne, wenn man den Fundamentalbegriff von Differentiirung des xy versteht. Wir glauben daher die Beschuldigung von uns ablehnen zu können, daß wir ohne Noth in Bestimmung der Grundideen der Differentiirkunst weitläufig gewesen seyen. Uebrigens werden die Differentialgrößen durch die Integrirung wieder aufgehoben, wie wir im folgenden zeigen. Wie z. E. x^3 differenzirt, $3x^2 dx$ gibt, so ist von diesem Differentiale das Integrale wieder um x^3 , welches gefunden wird, wenn man den Exponenten um eins vermehrt, und hernach alles mit dx und dem um eins vermehrten Exponenten dividirt. So ist das Integrale von $3x^2 dx = \frac{3x^{2+1} dx}{3 dx}$ aufgehoben werde.

$= x^3$; und das Integrale von $\frac{n}{m} x^m dx$

$$= \frac{\frac{n}{m} x^m dx}{\frac{n}{m} dx} = x^{\frac{n-m+1}{m}} = x^{\frac{n-m+m}{m}} = x$$

$= x$

$= x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$. u. s. w. Diese Formel kommt am häufigsten vor; wir haben daher selbige um so eher vorläufig anzuzeigen für gut befunden. Uebrigens solle auch diese Kunst im folgenden umständlich vorgetragen und erläutert werden.

Wer der Erfinder dieser schönen und gemeinnützigen Rechnung sey?

und wie ferne Isaac Barrow, der Lehrer Newtons, den Grund dazu gelegt habe.

Tab. IV.
Fig. 71.

Die Erfindung Barrows wird erzählt;

§. 297. Jetzt müssen wir doch auch fragen: wer der Erfinder von dieser so schönen und gemeinnützigen Rechnung gewesen sey? In England schreibt man sie dem Newton, und in Deutschland dem Leibniz zu. Inzwischen kann man nicht läugnen, daß Isaac Barrowius, ein gleich großer Theolog und Meßkündiger, unter welchem Newton zu Cambridge die mathematische Wissenschaften studierte, folgende Proportion aus einer von ihm angegebenen Figur geschlossen, und in seinen Lectionibus opticis & geometricis vorher schon, ehe Newton und Leibniz was schrieben, bekannt gemacht habe. Man beschreibe eine krumme Linie AM, die ihre convexe Seite gegen eine gerade Linie AP kehre; hernach ziehe man die Tangente TM, und ziehe die Semlordinate PM; wenn nun pm mit PM parallel und ihm so nahe gezogen wird, daß der Bogen Mm von der geraden Linie nicht abweicht, so wird die Subtangente PT gefunden werden, wenn man sagt:

MR

$$MR : Rm = MP : PT$$

oder in den von Barrow gesetzten Buchstaben:

$$e : a = y : \frac{ay}{e}$$

das heißt mit unsern Buchstaben $dy : dx = y : \frac{y dx}{dy}$

Das ist nun ein Fundamentalausdruck, dessen Fruchtbarkeit wir sogleich finden werden. Leibniz hat deswegen das ΔMRm ein Triangulum characteristicum genannt, weil man mit Zuziehung der Gleichungen der krummen Linie durch dasselbe solche Eigenschaften in Rücksicht auf die Subtangente entdeckt, welche erst die Differentialrechnung brauchbar und gemeinnützig machen. Nun ist freylich diese einige Barrowische Figur bey weitem noch nicht dasjenige, was die Fluxionenrechnung in sich faßt; allein für einen Newton und Leibniz war es schon genug. Geister von diesem Range können aus einem einigen Umstand und noch so kleinen Fingerzeig weiter schliessen. Und das ist es auch, was wir in Absicht auf die Erfindung dieser Rechnung sagen wollten. Wäre kein Newton und Leibniz gekommen, so würde der Barrowische Lehrsatz vielleicht lange ungenützt geblieben seyn, wie die Newtonische und Leibnizische Erfindung selbst noch jezo nicht so hoch geachtet wurden, wenn keine Euler und Bernoulli nach der Hand erst

und gezeigt, daß sie mit demjenigen, was Herr v. Leibniz das Triangulum characteristicum genannt habe, völlig übereinkomme.

Warum aber dem ungeachtet Newton und Leibniz den größten Antheil an der völligen Erfindung dieser Rechnung haben,

durch

durch ihre neue Entdeckungen dieser brauchbaren Rechnung einen bleibenden Namen, sich selbst aber einen unsterblichen Ruhm gemacht hätten.

Anwendung
dieser Rechnung
auf die
höhere Geometrie.

Tab. IV.
Fig. 70.

Allgemeine
Regel, wie
man durch
Hülfe des
Barrowis-
chen Dreiecks
aller
krummen Linien
Sub-
tangenten
ausdrücken
kann;

§. 208. Wir haben von der Erfindung dieser Kunst das nöthigste gesagt. Es ist also nichts mehr übrig, als daß wir jezo die Anwendung davon zeigen. Das Barrowische Dreieck, oder des Herrn v. Leibniz Triangulum characteristicum verdienet zuerst und vor allen andern unsere Aufmerksamkeit. Wenn man bey einer krummen Linie AM, sie mag für eine Beschaffenheit haben, was sie für eine will, die Abscissen AP, ferner die Semiordinate PM, und sodann mit der über den Scheitelpunkt verlängerten Abscisse PT die Tangente der krummen Linie, nemlich die Tangente TM in dem Punkte T vereiniget, so wird man dieses Dreieck bald bekommen. Denn man darf nur die der Semiordinate PM nächste Semiordinate pm, und sodann mit Pp aus dem Punkt der krummen Linie M die Parallellinie MR ziehen, so ist das $\triangle M R m$ dieses verlangte Dreieck. Denn nach den Grundsätzen der Aehnlichkeit ist das $\triangle M m R \sim \triangle T M P$ oder $T m p$; folglich wenn $PM = y$ und $AP = x$, so ist $Rm = dy$ und $MR = Pp = dx$, folglich da $mR : RM = PM : PT$, das ist $dy : dx = y : PT$;

so ist die Linie $PT = \frac{y \, dx}{dy}$.

Dieses ist der allgemeine Ausdruck für alle Linien dieser Gattung; man heißt sie Subtangenten. Eine Subtangente PT ist allemal diejenige gerade Linie, welche durch die Tangente TM und die Semior-
dinate PM bestimmt wird; und bey allen nur denkbaren krummen Linien wird sie durch $\frac{y \, dx}{dy}$ ausgedruckt. Wenn man nun

in einer gegebenen krummen Linie den Werth von $\frac{dx}{dy}$ u. s. w. durch die Diffe-

rentiation sucht, so wird sich die Subtangente in endlichen Größen bestimmen lassen. Wir wollen ein Exempel von der Parabel geben. Man solle die Subtangente bestimmen. Die Subtangente aller krummen Linien heißt $\frac{y \, dx}{dy}$; folglich

und wie man aus dem Ausdruck her- nach die Subtangente selbst in endlichen Größen finde.

muß ich aus der Gleichung für die Parabel, welche $ax = y^2$ ist, einen Werth, der dem obigen Ausdruck gleich ist, durch die Differentiation suchen. In der Parabel ist

Anwendung auf die Subtangente der Parabel.

folglich differenzirt:

$$ax = y^2$$

$$a \, dx = 2y \, dy$$

$$\text{-----} : a$$

$$dx = \frac{2y \, dy}{a}$$

$$\text{-----} \cdot y$$

$$y \, dx$$

$$y dx = \frac{2y^2 dy}{a}$$

$$\frac{y dx}{dy} = \frac{2y^2}{a} : dy$$

$$\frac{y dx}{dy} = \frac{2y^2}{a}$$

Denn damit ich die Subtangente $\frac{y dx}{dy}$

bekomme, so muß ich dx und seinen Wehrt in der Parabel, das ist die ganze Gleichung beederseits mit y multiplirciren, und hernach das Product mit dy beederseits dividiren. Die Subtangente in der Parabel ist also $= \frac{2y^2}{a}$; diese

aber läßt sich schicklicher ausdrücken: denn weil in der Parabel $ax = y^2$, so ist

$$2ax = 2y^2 \text{ und}$$

$$\frac{2ax}{a} = \frac{2y^2}{a} : a$$

$$\frac{2ax}{a} = \frac{2y^2}{a}$$

das ist, wenn man wilt, $2x = \frac{2y^2}{a} = PT$.
Ich dividirt.

Die doppelte Abscisse ist allemal der Subtangente in der gemeinen Parabel gleich;

Also ist in der Parabel die Subtangente allemal $2x$, oder die doppelte Abscisse, oder noch einmal so groß als die Abscisse. Oder allgemein, weil in den Parabeln

$$a^{m-1}x = y^m$$

$$a^{m-1}dx = my^{m-1}dy$$

$$dx = \frac{my^{m-1}dy}{a^{m-1}}$$

$$\frac{y}{dy}$$

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{my^m}{a^{m-1}}$$

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{my^m}{a^{m-1}}$$

$$y^m = a^{m-1}x \quad \text{folglich}$$

$$\frac{my^m}{a^{m-1}} = \frac{ma^{m-1}x}{a^{m-1}} = mx.$$

Wie diese Regel auf Parabeln von höhern Gattungen angewendet werde?

Die Subtangente in der Parabel ist also so die Abscisse so vielmal genommen, als der Exponent von der Semiordinate y Einheiten hat.

S. 209. Wie man die Subtangente von der durch die Differentialrechnung finden kann, so findet man auch die Subnormallinie. Wir müssen vor allen Dingen erklären, was wir unter dieser Linie verstehen. Wenn man auf den Punkt M der Tangente TM eine Perpendicularlinie HM dergestalt aufrichtet, daß sie endlich mit der Abscisse AH in dem Punkt H zusammen kommt: so heißt MH die Normal- und PH die Subnormallinie, welche durch die Semiordinate PM und die Normallinie MH bestimmt wird. Ben Tab. IV. M ist also, wie aus der Construction er-

von der Subnormallinie, was sie sey, und wie sie gleichfalls durch einen allgemeinen Ausdruck in allen krummen Linien bestimmt werde;

M m

hels

fig. 70. 66.

§46 Geom. IV. Cap. Von der
 hellet, ein rechter Winkel. Demnach

$$\text{ist } PT : PM = PM : PH = \frac{PM^2}{PT}$$

$$\text{das ist } \frac{ydx}{dy} : y = y : PH = \frac{y^2}{\frac{ydx}{dy}}$$

$$\text{Da nun } y^2 : \frac{ydx}{dy} = y^2 \cdot \frac{dy}{ydx} = \frac{y^2 dy}{ydx} =$$

$\frac{ydy}{dx}$, so ist die Subnormallinie bey allen

nur denkbaren krummen Linien $= \frac{ydy}{dx}$.

Man kann also aus der gegebenen Gleichung einer krummen Linie ihre Subnormallinie bald finden. Es sey z. E. wieder die Parabel, in welcher

$$ax = y^2$$

differentiirt $adx = 2ydy$

$$\text{-----} : 2y$$

$$\frac{adx}{2y} = dy$$

$$\text{-----} \cdot y$$

$$\frac{aydx}{2y} = \frac{adx}{2} = ydy$$

$$\text{-----} : dx$$

$$\frac{adx}{2dx} = \frac{1}{2}a = \frac{ydy}{dx}$$

In der Parabel ist die Subnormallinie dem halben Parameter gleich.

Demnach ist in der Parabel die Subnormallinie dem halben Parameter gleich, folglich eine beständige Linie. Da nun
 in

in der Parabel, nach der 66. Fig. und dem §. 189. gegebenen Beweis $AF = \frac{1}{4}a$, Tab. IV. Fig. 66. so wird $FP = AP - AF = x - \frac{1}{4}a$, folglich $FH = FP + PH = x - \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a = x + \frac{1}{4}a$. Da aber auch nach §. 189. $FM = x + \frac{1}{4}a$, so ist $FM = FH$, folglich das Dreieck FMH gleichschenkl. Weil ferner $TP = 2x$ nach §. 208. folglich weil $AP = x$, auch $TP = x$, und daher $TF = x + \frac{1}{4}a$, so ist auch $TF = FM = FH$; folglich kann aus F mit dem Radius TF ein Cirkel beschrieben werden, der durch die drei Punkte T , M und H gehen wird. Hieraus erhellet weiter, daß, weil das $\triangle FMH$ gleichschenkl., und daher die Winkel FMH und FHM einander gleich sind, auch der Winkel

$$mMQ = TMF; \text{ denn}$$

$$TMH = HMm \text{ als rechte Winkel;}$$

$$FMH = HMQ \text{ weil } FMH = FHM \text{ und}$$

$$FHM = HMQ;$$

folglich

$$TMH - FMH = HMm - HMQ \text{ das ist}$$

$$TMF = mMQ.$$

Daher müssen alle in einen parabolischen Spiegel einfallende Strahlen gegen den Brennpunkt F gebrochen und daselbst vereinigt werden; welches auch die Erfahrung nach den Grundsätzen der Optik lehret.

Warum alle in einen parabolischen Spiegel fallende Strahlen gegen den Brennpunkt gebrochen werden, und darinnen zusammen fallen müssen;

Wie man bey
andern krum-
men Linien
die Subtan-
genten und
Subnorma-
len finde,
wird durch
einige Exem-
pel erläutert.

§. 210. Auf eine ähnliche Weise
findet man bey andern krummen Linien
die Subtangente und Subnormallinie.
Z. E. bey den Ellipsen ist

$$y^2 = bx - \frac{bx^2}{a} \text{ folglich}$$

$$ay^2 = abx - bx^2 \text{ und differentiiert}$$

$$2aydy = abdx - 2bxdx = (ab - 2bx)dx$$

$$\frac{2aydy}{ab - 2bx} = dx$$

$$\frac{2ay^2}{ab - 2bx} \cdot \frac{y}{dy}$$

$$\frac{2ay^2}{ab - 2bx} = \frac{ydx}{dy}, \text{ oder wenn}$$

man den Wehrt von $2ay^2$ substituirt,

$$\frac{2abx - 2bx^2}{ab - 2bx} = \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x} = \frac{ydx}{dy}$$

= der Subtangente. Eben so ist im Cir-
kel $ax - x^2 = y^2$ folglich

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$\frac{2ydy}{a - 2x} = dx$$

$$dx = \frac{2ydy}{a - 2x}$$

$$\frac{2y^2}{a - 2x} \cdot \frac{y}{dy}$$

ydx

$\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{a-2x}$, das ist, wenn
man gleiches für gleiches setzt,

$$\frac{2ax-2x^2}{a-2x} = \frac{ax-x^2}{\frac{1}{2}a-x}$$

die Subtangente des Circels; und seine
Subnormale ist, weil nach der bereits ge-
suchten Differentiation,

$$adx - 2xdx = 2ydy \quad \text{oder}$$

$$(a-2x)dx = 2ydy \quad \text{und}$$

$$\text{-----} : dx$$

$$a - 2x = \frac{2ydy}{dx}$$

$$\text{-----} : 2$$

$$\frac{1}{2}a - x = \frac{ydy}{dx}$$

der halbe Diameter weniger die Abscisse;
folglich fangen sie alle in dem Mittelpunkt
an, weil $\frac{1}{2}a$ dem Radius gleich ist, und
man in der gegebenen Gleichung die Ab- Von dem
scissen von dem Scheitelpunkt an rechnet. weiten Um-
Unsere Leser sehen aus diesen Exempeln fang dieser
schon, wie weit sich diese einige Aufgabe Lehre.
von den Subtangenten und Subnormal-
linien erstrecke; wir wollen daher nicht
ohne Noth weitläufig seyn, und nur die
einige Logistik noch betrachten.

Tab. IV.
Fig. 69.

Warum man
besonders
von der loga-
rithmischen
Linie noch
handle,, und
ihre Subtan-
gente bestim-
me?

Ausführli-
cher Beweis,
daß die Sub-
tangente der
Logistik eine
unveränder-
liche Linie
sey.

§. 211. Man ziehe die Tangente der logarithmischen Linie TM, so ist, wenn, wie in der Fig. 70. die übrige Linien gezogen werden,

$$MR : Rm = PM : PT, \text{ das ist}$$

$$dy : dx = y : \frac{y dx}{dy}$$

Eben so wird bey einer jeden grössern oder kleinern Abscisse v, und Semiordinate z, die correspondirende Subtangente seyn $\frac{z dv}{dz}$. Nun gehen die Abscissen der

Logistik in einer geometrischen Progression fort, folglich sind ihre Differentiationen einander gleich; denn die Geschwindigkeit, mit deren sie sich verändern, ist immer einerley; oder anders die Sache auszudrücken, die Differenz in einer arithmetischen Proportion ist immer eben dieselbe, sie mag noch so groß oder noch so klein seyn. Demnach ist $dy = dx$. Die Semiordinaten hingegen haben in der Logistik kraft der gegebenen Erklärung eine geometrische Verhältniß zu einander; das ist, wenn sie y und z heißen;

$$y : z = y + dy : z + dz \text{ oder versezt,}$$

$$y : y + dy = z : z + dz \text{ folglich auch}$$

§. 60.

$$y : (y + dy) - y = z : (z + dz) - z$$

das ist

$$y : dy = z : dz, \text{ oder}$$

$$\frac{y}{dy} = \frac{z}{dz} \quad \text{Nun ist}$$

$$dx = dv \quad \text{folglich multiplicirt}$$

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{zdv}{dz}. \quad \text{Da nun diese beide}$$

Ausdrücke Subtangente anzeigen; so folgt daraus, daß alle Subtangente der Logistik einander gleich, und also ihre Subtangente eine beständige Linie seyen. Weitere Anwendungen wollen wir von dieser Gattung der Differentialgleichungen nicht anführen. Unsere Leser begreifen von selbst, daß es noch eine Menge geben werde, die aber alle mit dem gegebenen eine Aehnlichkeit haben. Wir handeln daher jetzt eine andere Differentialmaterie ab, welche mit dem sogenannten Maximo und Minimo sich beschäftigt.

§. 212. Wenn eine GröÙe so lang wächst, bis sie auf einen gewissen Grad oder Punkt kommt, und hernach entweder stille steht, oder wieder abnimmt: so sagt man von ihr, sie habe ein Maximum. So hat diejenige krumme Linie, welche man den Kreis nennet, ein Maximum: denn wenn sie sich so weit von dem Diameter entfernt hat, daß ihre Distanz seiner Hälfte gleich ist, so hat sie ihr Maximum erreicht, und kehret von

Erklärung
derjenigen
Größen, wel-
che ein Maxi-
mum und
Minimum
haben;

Was bey den
Kreiseln und
Ellipsen das
Maximum
sey.

selbigem Punkt an wiederum näher zur Ase oder zum Diameter. Eben so hat die Ellipsis ein Maximum. Die Parabeln und Hyperbeln hingegen wachsen unendlich fort, oder entfernen sich von ihrer Ase bis ins unendliche: man kann also nicht sagen, daß sie ein Maximum haben; ausser wenn man sagen wollte, die unendliche Entfernung von der Ase sey ihr Maximum. Dieser Ausdruck aber gehört nicht hieher. Ein Minimum ist, wenn eine Grösse sich bis auf einen gewissen Grad vermindern läßt, oder kleiner wird, hernach aber entweder stille steht, oder aber wieder grösser wird. Bey krummen Linien bedient man sich zu Bestimmung der Sache der Semiordinaten und Abscissen, z. E. man sagt, die größte Semiordinate vom Cirkel ist der Radius, u. s. w. Bey andern Figuren kann man das Maximum oder Minimum überhaupt betrachten. Z. E. wenn ich frage, wie muß ich eine Linie theilen, daß durch die Multiplication der beeden Theile das größte Viereck, das aus dieser Linie möglich ist, entstehe? oder wie muß der Zimmermann einen gegebenen Balken hauen, daß der Balkenkopf das allergrößte Viereck, das sich daraus hauen läßt, vorstelle? oder welches ist das größte Dreieck, das in einen halben Cirkel beschrieben werden kann? u. s. w. Aus allen diesen

Ers

Wie fern eine Grösse ein Minimum habe.

Wie man das Maximum und Minimum überhaupt betrachten, und am faßlichsten sich vorstellen könne;

Erklärungen und Exempeln begreift man nun leicht, daß das Differentiale von einem Maximo oder Minimo allemal null seyn werde. Denn wenn es das Maximum seyn solle, so ist es ja, in so fern es das Maximum ist, unveränderlich, und kann weder grösser noch kleiner werden; eine beständige oder unveränderliche Grösse aber hat kein Differentiale, oder sein Differentiale ist allemal nulle; folglich wenn eine solche Grösse, die ein Maximum oder Minimum seyn solle, differentirt wird, so muß ich ihr Differentiale allemal $= 0$ setzen; da sich denn bald ihre Grösse ergeben wird.

§. 213. Nun habe ich den Begriff von dem, was ein Maximum oder Minimum heisst, hinlänglich erklärt. Wenn man demnach die Linie DE also theilen sollte, daß der eine Theil die Grundlinie, und der andere die Höhe des größten Vierecks, das sich daraus bestimmen läßt, abgeben sollte, so wird sich die Frage bald auflösen lassen. Man nenne $DE = a$, und weil wir den Punkt, wo sie getheilt werden solle, noch nicht wissen, so wollen wir die Grundlinie $DC = x$ nennen; folglich wird die noch übrige Linie, oder die Höhe des Vierecks $a - x$, und das ganze Viereck $(a - x)x$ heissen. Dieses soll nun ein Maximum seyn. Man multiplicire nun wirklich; so ist

$$Mm \quad x$$

$$ax$$

$$ax - x^2 = \text{Maxim. und}$$

$$\underline{adx - 2x dx = 0. \text{ Folglich}}$$

$$adx = 2x dx$$

$$\underline{\hspace{1.5cm}} : dx$$

$$a = 2x \quad \text{Dahero}$$

x allein oder $x = \frac{1}{2}a$. Also muß die Linie in zween gleiche Theile getheilet werden, da dann die Grundlinie und Höhe gleich sind; folglich ist das Quadrat das größte Viereck, das aus einer gegebenen Linie gemacht werden kann. Verlangt man das größte Dreieck, das auf den Diameter des Cirkels beschrieben werden kann, so schlägt man einen gleichen Weg ein. Dann es ist eben so viel, als ob man das größte rechtwinklichte Dreieck in Cirkel verlangte; weil alle Winkel an der Peripherie, die auf einem halben Cirkel stehen, rechte Winkel sind. Nun seye nach der 21. Fig. $AB = a$, AD die Seite des Dreiecks $= x$, so wird, weil bey D ein rechter Winkel ist, $DB = \sqrt{(AB^2 - AD^2)} = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ und der Inhalt des Dreiecks selbst $\frac{AD \cdot DB}{2} = \frac{x\sqrt{(a^2 - x^2)}}{2}$ ein Maximum;

folglich auch $x^2 a^2 - x^4 = \text{Maxim. dahero}$
differentiirt $2a^2 x dx - 4x^3 dx = 0$.

Folglich

$$\underline{2a^2 x dx = 4x^3 dx}$$

$$\underline{\hspace{1.5cm}} : dx$$

$$2a^2 x$$

Welches das größte Dreieck sey, das man auf den Diameter eines gegebenen Cirkels aufrichten könne;

Tab. I.
Fig. 21,

$$2a^2x = 4x^3$$

$$\text{-----} : 2x$$

$$a^2 = 2x^2$$

$$\text{-----} : 2$$

$$\frac{1}{2}a^2 = x^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}a^2} = x,$$

Demnach ist es das gleichschenklige Dreieck: dann weil $AD^2 = x^2 = \frac{1}{2}a^2$, so muß auch $DB^2 = \frac{1}{2}a^2$ seyn; weil $AD^2 + DB^2 = AB^2 = a^2$ nach dem pythagoräischen Lehrsatz. Hieraus erhellet nun weiter, daß das größte Viereck, das in einen Kreis beschrieben werden kann, ein Quadrat sey; weil das Dreieck ADB die Hälfte von diesem Maximo ist.

§. 214. Wir wollen auch Exempel von den krummen Linien in Absicht auf ihre Abscissen, Semiordinaten u. s. w. geben. Es ist klar, daß bey solchen krummen Linien, die ein Maximum haben, die Tangente unendlich groß wird, folglich auch die Subtangente; daher die Subnormallinie null ist. In solchen Fällen setzt man also $\frac{ydy}{dx} = 0$; wenn aber dies ges ist, so muß auch $dy = 0$ seyn. Zuweilen ist es auch umgekehrt, daß nemlich die Subtangente null, und die Subnormallinie unendlich wird. Der erstere Fall aber kommt häufiger vor. Da wir nun wissen,

welches die
größte Ab-
scisse im Cir-
kel seye.

sen, daß der Cirkel ein Maximum hat;
so wollen wir seine Gleichung betrachten:
sie heißt

$$ax - x^2 = y^2 \quad \text{folglich differentiirt,}$$

$$a dx - 2x dx = 2y dy$$

$$a dx - 2x dx$$

$$\frac{\quad}{2y} = dy = 0.$$

$$2y$$

$$\frac{a dx - 2x dx}{2y} = 0$$

$$a dx - 2x dx = 0$$

$$a dx = 2x dx$$

$$\frac{\quad}{a} : dy$$

$$a = 2x$$

$$\frac{\quad}{2} : 2$$

$$\frac{1}{2}a = x.$$

Wenn also die Abscisse dem halben Dia-
meter gleich ist, so wird die größte Se-
miordinate gezogen werden können; näm-
lich der Radius. Man darf nur den
Wehrt von x in die Gleichung setzen, so fin-
det man $ax - x^2 = \frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}aa = y^2$ folg-
lich $\frac{1}{2}a = y$. Eben so gehet man bey an-
dern krummen Linien zu Werke.

S. 215. Wie man das Maximum
findet, so kann man auch das Minimum
finden. Man solle aus H diejenige Linie
an die krumme Linie A M ziehen, welche
die kleinste unter allen sey, die man aus
gedachten Punkte ziehen kann. Man
setze wie bisher $AP = x$ $PM = y$ $AH = c$

so

Exempel in
Absicht auf
das Mini-
mum;

Tab. IV.
Fig. 66.

welches die
kleinste Linie
sey, die man

so ist $PH = c - x$. Nun ist nach dem Py-
 thagorischen Lehrsatz $MH^2 = PM^2 + PH^2$, aus einem
 folglich $MH^2 = y^2 + (c - x)^2$, gegebenen
 da nun Punkt an ei-
 die Linie MH die kleinste seyn sollte, ne gegebene
 muß auch ihr Quadrat das kleinste seyn; krumme Li-
 folglich $MH^2 = y^2 + (c - x)^2$ ein nie ziehen
 Mini- fönnne;
 mum; oder wenn man wirklich multipli-
 cirt, $y^2 + c^2 - 2cx + x^2 = \text{Min.}$
 folglich $2ydy - 2cdx + 2xdx = 0$.

$$ydy - cdx + xdx = 0.$$

Wenn man also den Wehrt von ydy
 in einer gegebenen krummen Linie für ydy
 setzt, so wird man die gesuchte Linie fin-
 den. Z. E. in der Parabel:

$$ax = y^2 \text{ folglich}$$

$$adx = 2ydy \text{ und}$$

$$\frac{1}{2} adx = ydy.$$

Hier haben wir
 schon den Wehrt von ydy ; diesen setzen
 wir in der obigen Gleichung: da dann
 herauskommt,

$$\frac{1}{2} adx - cdx + xdx = 0.$$

$$\frac{1}{2} a - c + x = 0 \quad \text{demnach}$$

$$x = c - \frac{1}{2}a$$

$$\text{und}$$

$$\frac{1}{2}a = c - x.$$

Da nun in der Parabel die Subnormal-
 Linie

Linie $\frac{1}{2}a$ heißt §. 209. so ist $PH = \frac{1}{2}a$; folglich muß MH , die gesuchte Linie, die Normallinie seyn, welche auf die krumme perpendicular gezogen werden muß. Eben so findet man bey den übrigen Kegelschnitten, daß die von der Ase an die Peripherie oder an den Perimeter gezogene Perpendicularlinie die kürzeste unter allen sey, welche aus einem gegebenen Punkte gezogen werden können. Das ist nun die Anwendung der Differentialrechnung auf die Lehre von dem Maximo und Minimo, welche um so wichtiger ist, je mehr man aus der Betrachtung der Werke Gottes in der Natur wahrnimmt, daß überall das Maximum und das Minimum darinnen herrschet; wie dann besonders der erst kürzlich durch den Tod der gelehrten Welt allzufrüh entrissene Präsident der Königl. Preuß. Akademie Herr v. Maupertuis den Grundsatz des Minimi in der Natur nicht nur festgestellt, sondern auch zum Beweise des Daseyns eines gütigen und weisen Schöpfers mit einem so lebhaften als scharffinnigen Witz angewendet hat.

Wie in der ganzen Natur ein Maximum und Minimum statt finde;

Eine Entdeckung, deren Anwendung man besonders dem Hrn. Präsidenten von Maupertuis zu verdanken hat.

Was Integriren heiße, oder was die Integralrechnung sey?

§. 216. Wenn man diejenige GröÙe, durch deren Differentiation ein gegebenes Differentiale entstanden, genau finden kann, so heißt es, man habe das Differentiale integrirt; und diese Kunst wird nun überhaupt die Integralrechnung ge-

genannt. Das Zeichen der Integration ist ein \int ; so wird das Integrale von dx geschrieben $\int dx$, und das von $2x dx$ schreibt man $\int 2x dx$ u. s. w. Die Deutschen haben deswegen das \int zum Zeichen der Integration erwählet, weil sie das Integrale als die Summe aller Differentialien oder unendlich kleinen Theile der Grösse ansehen: dahero sie durch das lateinische \int die Summe bezeichnen. In England hingegen heisst die Differentiir Kunst, wie wir schon gemeldet, eine Fluxionenrechnung, und dahero das, was wir Integriren nennen, die umgekehrte Fluxionenrechnung. Nachdem wir nun diese Erklärung vorausgeschickt haben, so werden sich die Hauptregeln des Integrirens bald verstehen lassen. Das Integrale von dx ist x , und von $dx + dy$ ist es $x + y$ u. s. w. Das hat keine Schwierigkeit; weil ferner das Differentiale $x dy + y dx$ aus xy entstanden ist, so muß sein Integrale, das ist, $\int (x dx + y dx)$ auch xy seyn. Und weil das Differentiale von $x^2 = 2x dx$, von x^3 aber $3x^2 dx$, und allgemein von x^m , $mx^{m-1} dx$ §. 203. so sind die Integralien davon x^2, x^3, x^m u. s. w. Eben so ist das Integrale von

$$\frac{n-m}{m} x^m dx = x^m = \sqrt[m]{x}, \text{ und } \frac{\int (y dx - x dy)}{y^2}$$

$= \frac{x}{y}$ wie man aus §. 203. leicht ersiehet. Man hat daher nur auf die Art und Weise Achtung zu geben, wie ein Differentiale entsteht, wenn man bemühet ist, sein Integrale wieder zu suchen.

Anzeige der
gewöhnlich-
sten Formeln,
wonach die
Integration
sich richtet.

§. 217. Will man nun eine kurze Regel sich bekannt machen, so darf man nur alle Formeln nach der Ordnung hinschreiben; da dann seyn muß

$$\text{I. } \int dx = x \text{ oder } x \mp a.$$

$$\text{II. } \int (dx \mp dy) = x \mp y \text{ oder } x \mp y \pm a.$$

$$\text{III. } \int (xdy + ydx) = xy \text{ oder } xy \mp a^2$$

$$\text{IV. } \int adx = ax$$

$$\text{V. } \int (mx^{m-1}dx = x^m \quad \frac{n}{m}$$

$$\text{VI. } \int \left(\frac{n}{m} x^{\frac{n-m}{m}} dx = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \right)$$

$$\text{VII. } \frac{\int (ydx - xdy)}{y^2} = \frac{x}{y}.$$

Wie man
beim Inter-
griren die be-
ständigen
Größen finde;

Das sind alle Formeln, die einem vorkommen können. Wir haben bey der ersten, zweyten und dritten beständige Größen addirt und subtrahirt, welches unsere Leser nicht befremden wird, wenn sie sich noch erinnern, daß die beständige Größen durch die Differentiation Null werden; folglich muß man sie bey dem Integriren wieder addiren: was es aber für

für Grössen seyn müssen, wird man aus und wie diese der Natur der Gleichung, aus den St. Kunst beson- guren, nach welchen sich die Gleichung ders durch richtet, und besonders aus der Uebung hie und Auf- merksamkeit und da am besten lernen. Z. E. wenn auf die Gleis- ich das Differentiale der Hyperbel $2 y d y = x d y + y d x$ hätte, so ist sein Inte- chungen und Figuren er- lernet werde. grale $y^2 = xy$; da mir dann gleich eins fallen wird, daß die Gleichung zur Hy- perbel zwischen den Asymptoten gehöre, und in dieser Gleichung $y^2 = a^2 + yx$ seyn; folglich muß ich bey der Integra- tion a^2 addiren. u. s. w. Doch läugnen wir nicht, daß die Addition und Subtraktion der beständigen Grössen je und je schwer zu bestimmen sey; besonders wenn einige differenzirte Glieder sich gegen ein- ander aufheben. u. s. w. Die meiste Schwierigkeiten aber wird derjenige über- winden, der sich nach den bereits ange- führten Regeln fleißig übet.

§. 218. Unter den angezeigten For- meln kommt die fünfte und sechste am öf- Welche Inte- grationsfor- meln am häus- ze Regel, sie zu integriren, sich um so figsten vors- eher bekannt machen, weil es Anfängern kommen; oft schwer fällt, die Aehnlichkeit einer ge- gebenen Formel mit den vorgeschriebenen sogleich einzusehen. Z. E. $-\frac{2}{3} x - \frac{5}{3} d x$ ist ein Differentiale, das dem in der sechs- ten Formel ganz ähnlich ist, und nach selb- biger integrirt wird; ungeachtet ein An- fänger

und was für
eine allge-
meine Regel
man dazu
wissen müsse?

Anwendung
der gegeb-
nen Regel
auf allerhand
Fälle;

fänger die Aehnlichkeit nicht sogleich bemerken wird. Die allgemeine Regel für die fünfte und sechste Formel ist also diese: Man vermehrt den Exponenten der veränderlichen Gröſſe um eins, und dividirt hernach alles mit dem in das Differentiale der ersten Dignität der veränderlichen Gröſſe (dx) multiplicirten neuen Exponenten. Zum Ex. $mx^{m-1}dx$ soll integrirt werden. Die veränderliche Gröſſe heißt x , ihr Exponent ist $m-1$, den vermehrt man um eins, so hat man $mx^{m-1} + 1 dx = mx^m dx$; das Differentiale der ersten Dignität von der veränderlichen Gröſſe ist dx , dieses multiplicirt man mit dem neuen Exponenten $m-1+1=m$, so hat man mdx ; mit diesem Producte dividirt man $mx^m dx$, so hat man $\frac{mx^m dx}{mdx} = x^m$ das Integra-

le von $mx^{m-1} dx$. Eben so findet man das Integrale von $-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}dx =$

$$\frac{-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}+1}dx}{-\frac{5}{3}+1} = \frac{-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}+1}dx}{-\frac{5}{3}+1} = \frac{-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx}{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx}{-\frac{2}{3}} = x^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^{-2}} = \sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}};$$

und das Integrale von $x^m dx =$

$$\frac{x^{m+1}dx}{m+1} = \frac{1}{m+1} x^{m+1},$$
 denn wenn

man

man wiederum dieses Integrale wirklich differentiiert, so kommt heraus

$$\frac{m+1}{m+1} x^{m+1} - 1 dx = x^m dx.$$

Man siehet hieraus die Allgemeinheit unserer Regel: dahero Anfänger wohl thun, wenn sie sich allerhand Exempel von dieser Art vorgeben, und die Regel selbst in eine fertige Übung bringen.

§. 219. Nunmehr können wir schon den Nutzen der Integralrechnung bey der Quadratur der krummen Linien zeigen. Wenn zwei Semlordinaten parallel und einander so nahe gezogen werden, daß der Bogen Mm von einer geraden Linie nicht abweicht; so ist in der Figur das kleine Viereck PMmp oder Pp.p m das Element oder das Differentiale des Raums Amp. Nun ist MR = Pp = dx und p m = y, folglich Pp . pm = y dx. Das heißt, y dx ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Fläche AMP verändert. Wenn man also aus einer gegebenen Gleichung y dx findet, und hernach integriten kann; so wird der Raum einer solchen Figur gefunden. Z. E. in der Parabel ist: $ax = y^2$ folglich

$$\sqrt{ax} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$$

$$\frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx = y dx; \text{ dieses}$$

N n 2

Von der Quadratur der krummen Linien.

Tab. IV. Fig. 70.

Wie sich parabolische Stücke durch Hilfe dieser Rechnung völlig quadriren lassen;

integriert, giebt $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \int y dx$.

§. 216.

Nun ist $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = y$ folglich

$$\frac{2}{3}yx = \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}; \text{ demnach}$$

nach ist der parabolische Raum $A p m = \frac{2}{3}xy$, also vollkommen quadriert. Das heißt, dieser Raum ist $\frac{2}{3}$ von dem Rectangulo aus der Abscisse in die Semior-
dinate, oder dieses Rectangulum xy ver-
hält sich zum parabolischen Raum Amp
wie 3 zu 2. Eine Quadrirung, welche
Archimedes schon gefunden hat. Ob
er sie aber durch die Fluxionenrechnung,
oder auf eine andere Weise zuerst gefun-
den hat, ist nicht bekannt. Im erstern Falle
müßten die Alten viele Künste, und auch
die Differentiationskunst gewußt haben,
welche nach der Hand verlohren gieng,
und erst von den Neuern wiederum ers-
funden wurde. Allein es läßt sich die
Quadratur der Parabel auch ohne diese
Rechnung finden; nur ist es ungleich
mühsamer, wenn man die Fluxionenme-
thode nicht dazu braucht: daher man
eben nicht nöthig hat, zu sagen, Archi-
medes habe wirklich diese neuerfundene
Kunst gewußt. Aber eben dieses gereicht
ihm und den Alten überhaupt zu einem
desto größern Ruhme, weil sie ohne die
neueren Mittel, die einem die Rechnung

und wie Ar-
chimedes
schon diese
Quadratur
gewußt habe.

und

ungemein erleichtern, so schwere Aufgaben auseinander gewickelt und aufgelöst haben.

§. 220. Wenn man eine Parabel quadriren kann, so lassen sich alle durch die allgemeine Rechenkunst quadriren. Dann es sey $a^n x^m = y^r$ so

Eine allgemeine Formel, alle Parabeln zu quadriren.

so ist $\sqrt[r]{a^n x^m} = a^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m}{r}} = y$

und $a^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m}{r}} dx = y dx$

dahero $\frac{r}{m+r} a^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m+r}{r}} = \int y dx$.

Da nun $a^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m}{r}} = y$, so ist

$\frac{r}{m+r} yx = \int y dx$.

Man darf also für r und m nur Zahlen setzen, so wird man allerley Parabeln wirklich quadriren können. Nun ist die Frage: ob man nicht auch den Circle, durch Hülfe der Fluxionenrechnung, quadriren könne? Wir wollen einen Versuch wagen, da sich dann gleich der Nutzen der Newtonischen Regel für die Potenzen zeigen wird. Es seye der Diameter $AB = 1$. Die Abscisse $AD = x$; so ist $DB = 1 - x$, und die Semiordinate ED

Ob man nicht auch den Circle durch diese Rechnung quadriren könne?

Tab. II.
Fig. 37.

solle y heißen. Folglich

$$y^2 = (1 - x)x = x - x^2$$

$$y = \sqrt{(x - x^2)} = (x - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$y dx = dx \sqrt{(x - x^2)} = dx \cdot (x - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Wenn man nun das Integrale aus dem letzten Auszuge finden kann, so ist der Eirkel quadriert. Man ziehe also aus $x - x^2$

Was für eine die Quadratwurzel nach der Newtonischen Methode, Regel aus, da dann

den Eirkel zu quadriren, Newton gebraucht habe;

$$P = x, \quad Q = -\frac{x^2}{x} = -x$$

$$m = 1, \quad n = 2. \quad \text{Folglich}$$

$$P \frac{m}{n} = x^{\frac{1}{2}} = A.$$

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} \cdot -x = -\frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} = B.$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} \cdot -x =$$

$$-\frac{1}{8} x^{\frac{5}{2}} = C, \text{ u. s. w.}$$

Das giebt nun eine unendliche Reihe, in welchem $y dx = x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} dx + \frac{1}{8} x^{\frac{5}{2}} dx$ u. s. w. folglich

$$fy dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{7} x^{\frac{7}{2}} \text{ u. s. w.}$$

Das ist die Quadratur des Stücks vom Eirkel AED; weil sie Newton gefunden, Herr v. Leibnitz hat die folgende gegeben;
und

und gezeigt, daß wenn der Radius = 1, so
 seye der Cirkelbogen von $45^\circ = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ Wie der Herr von Leibniz
 $-\frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ u. s. w. Dann man ziehe Tab III.
 he die Linie Cb der andern CB so nahe, daß Fig. 17.
 der Bogen Mm einer geraden Linie gleich diese Aufgabe
 kommt; so ist, wenn man Bu auf Cb per- be aufzulösen
 pendicular ziehet, und der Radius CA sich bemühet
 = 1, die Tangente AB = t gesetzt wird, habe;
 CB, die Secante des Bogens AM nach
 dem pythag. Lehrsatze

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{1 + tt.} \text{ Da nun} \\
 &CB : CA = Bb : Bu, \text{ so ist} \\
 &\sqrt{1 + tt} : 1 = dt : \frac{Bu = dt}{\sqrt{1 + tt}}
 \end{aligned}$$

Dann Bb ist das Differentiale von der
 Tangente AB, folglich wird es durch dt
 ausgedrückt. Es ist aber ferner

$$CB : Bu = CM : Mm; \text{ das ist}$$

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{1 + tt} : \frac{dt}{\sqrt{1 + tt}} = 1 : \\
 &\frac{dt}{\sqrt{1 + tt} \cdot \sqrt{1 + tt}} = \frac{dt}{1 + tt}
 \end{aligned}$$

Demnach ist das Differentiale von dem
 Bogen A M = $\frac{dt}{1 + tt}$; dieses wird nun
 entweder nach der Newtonischen Regel,
 oder durch das gewöhnliche Dividiren,
 weil $\frac{dt}{1 + tt} = \frac{1 \cdot dt}{1 + tt}$, in eine unendliche

und wie er
gefunden,
daß der recti-
ficirte Bogen
von 45°

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{1}{3} \\ &+ \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \\ &+ \frac{1}{9} \text{ u.s.w} \end{aligned}$$

Reihe verwandelt: da dann $tt = 1$ wird, wenn der Bogen 45° hält, weil in diesem Falle die Tangente dem Radius, welcher hier eins gesetzt wurde, gleich wird.

Da es dann nach §. 73. folgende Progression gibt $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ u. s. w. wodurch der rectificirte Bogen von 45° ausgedruckt wird. Ein Ausdruck, der uns nun auch auf die Rectification der krummen Linien fñhret.

Von der Res-
tification
der krummen
Linien über-
haupt ;

§. 221. Die Rectification der krummen Linien ist nach der Bedeutung dieses Worts nichts anders, als die Kunst, eine krumme Linie in eine gerade Linie zu verwandeln, oder eine gerade Linie zu erfinden, welche den gegebenen krummen Linien gleich sey. Daß nun dieses möglich sey, erhellet daraus, weil eine jede krumme Linie aus unendlich viel unendlich kleinen geraden Linien bestehet, oder weil man sich selbige wenigstens also vorstellen kann. Darauf kommt demnach alles an, daß man einen solchen unendlich kleinen Theil der krummen Linie findet, und hernach ihn integrirt. Zur Erfindung des unendlich kleinen Theils ist uns der pythagorische Lehrsatz, und zu seiner Integration die Newtonische Regel von Ausziehung der Wurzeln behülflich. Denn nach jenem ist mM ein solch unendlich kleiner Theil der krummen Linien, man mag sie auf der convergen-

oder

Wie das Element einer zu rectificiren den krummen Linie ausgedruckt werde ;

Tab. IV.
Fig. 70, 71.

oder hohlen Seite betrachten, allemal
 $= \sqrt{(mR^2 + RM^2)}$ das ist in Buchstaben
 $mM = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; daher darf
man nur aus der Gleichung für die krumme
Linie das Element mM oder $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ Anwendung
und hernach die Wurzel durch die Approximationsregel
suchen. Z. E. in der Parabel ist auf die Parabel;

$$ax = y^2 \text{ und}$$

$$adx = 2y dy \text{ dieses quadriert, giebt}$$

$$\frac{a^2 dx^2 = 4y^2 dy^2}{: a^2}$$

$$dx^2 = \frac{4y^2 dy^2}{a^2}$$

$$dy^2 = dy^2 \text{ addirt, giebt}$$

$$dx^2 + dy^2 = dy^2 + \frac{4y^2 dy^2}{a^2}$$

$$\frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{dy^2 + \frac{4y^2 dy^2}{a^2}}} = \sqrt{dy^2 + \frac{4y^2 dy^2}{a^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{dy^2 a^2 + 4y^2 dy^2}{a^2}}$$

$$= dy \sqrt{\frac{a^2 + 4y^2}{a}}$$

Wenn ich nun $\frac{dy \sqrt{a^2 + 4y^2}}{a}$ integri-

ren kann, so habe ich den parabolischen Bogen gefunden, oder in eine gerade Linie verwandelt. Man versuche es daher,
N n 5
Nebst Anzei-
ge des großen
Nutzen, den
die Newton's-
che Approxi-
mationsre-

gel hier auf-
fert.

und ziehe nach der Newtonischen Regel aus $a^2 + 4y^2$ die Quadratwurzel aus; da dann $m = 1$, $n = 2$, $P = a^2$ und

$$Q = \frac{4y^2}{a^2} \text{ folglich}$$

$$P_n^m = a^{\frac{2}{2}} = a = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{\frac{1}{2}a \cdot 4y^2}{a^2} = \frac{2y^2}{a} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \frac{2y^2}{a} \cdot \frac{4y^2}{a^2} = \frac{-2y^4}{a^3} = C,$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} \frac{2y^4}{a^3} \cdot \frac{4y^2}{a^2} = \frac{4y^6}{a^5} = D$$

u. f. w.

Folglich ist $\frac{dy \sqrt{a^2 + 4y^2}}{a} = \frac{ady}{a}$ das ist

$$= dy + \frac{2y^2 dy}{a^2} - \frac{2y^4 dy}{a^4} + \frac{4y^6 dy}{a^6} \text{ u. f. w.}$$

und das Integrale oder $\frac{f(dy \sqrt{a^2 + 4y^2})}{a}$

$$= y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} \text{ u. f. w.}$$

Allgemein-
heit der gege-
benen Regel;

Auf diese Weise werden nun alle krumme Linien rectificirt; wenn man nur die Newtonische Regel schicklich dabey anbringt. Man siehet hieraus schon den
vors

vorzüglichem Nutzen dieser höchstbrauch-
 baren Regel, welche wir, wenn wir weit-
 läufig seyn wollten, mehr als zwanzig=
 mal bey der Rectification der krummen
 Linien anbringen könnten: allein uns ge-
 nügt, an einem Exempel gewiesen zu ha-
 ben, wie man die andere zu behandeln.
 Uebrigens ist ohne unser Erinnern klar,
 daß man die Krümme nicht ganz genau
 finden kann, weil das Integrale eine un-
 endliche Reihe giebt.

Warum man
 bey der ver-
 suchten Re-
 ctification
 die Krümme
 nicht ganz
 genau finden
 könne?

S. 220. Es ist noch übrig, daß wir
 zeigen, wie man durch Hülfe der Inte-
 gralrechnung aus der gegebenen Tangen-
 te oder Subtangente u. s. w. die Glei-
 chung für die krumme Linie finde, deren
 Tangente sie ist. Alle Subtangenten
 werden, wie wir oben gehört, durch die
 allgemeine Differentialformel $\frac{y \, dx}{dy}$ aus-
 gedruckt; wird nun ein anderer Ausdruck
 für die Subtangente, z. E. der Ausdruck
 $\frac{2y^2}{a}$ gegeben, so muß er dem obigen voll-
 kommen gleich seyn. Nun wollen wir
 die krumme Linie suchen, deren Subtan-
 gente $\frac{2y^2}{a}$ ist; Es ist klar, daß

Wie man
 durch Hülfe
 der Integral-
 rechnung aus
 der gegebene-
 nen Subtans-
 gente u. s. w.
 die krumme
 Linie finden
 könne;

$$\frac{y \, dx}{dy} = \frac{2y^2}{a} \text{ folglich}$$

aydx

$$a y dx = 2 y^2 dy$$

$$\frac{a y dx}{2 y^2 dy} = 1$$

ad x = 2ydy, dieses integrirt, giebt

$$a x = y^2$$

eine Gleichung für die

Parabel. Auf diese Weise lassen sich eine Menge krummer Linien bestimmen, wie unsere Leser von selbst einsehen werden. Eine ist besonders noch merkwürdig, nämlich die Logistike, weil sie uns einen Begriff von den logarithmischen Differentia-
lien und Integralen beybringen wird. Wir wissen aus §. 211. daß ihre Sub-
tangente eine beständige Linie ist; nun wollen wir umgekehrt diejenige krumme
Linie suchen, deren Subtangente unver-
änderlich ist. Es seye demnach die Sub-
tangente = a, oder welches zu unserm
Vorhaben einen noch schicklichern Aus-
druck giebt, = 1; weil 1 so gut unverän-
derlich ist als a. Diesem zu Folge wird
die Subtangente algebraisch ausgedruckt

seyn $\frac{y dx}{dy} = 1$.

$$\frac{y dx}{dy} = 1$$

$$y dx = dy$$

$$\frac{y dx}{dy} = 1$$

$$dx = \frac{dy}{y}$$

Nun ist §. 199.

$$dx = 1. dy; \text{ weil } x = 1. y \text{ §. cit. folgl.}$$

$$\frac{dy}{y} = 1. dy.$$

Hier

und wie man
besonders
aus der geg-
benen Sub-
tangente der
Logistike nicht
nur die Logi-
stike finden,
sondern auch
den Ausdruck
für die loga-
rithmische
Differentia-
lien bestim-
men könne;

Ausführli-
cher Beweis,
daß das loga-
rithmische
Differential
von y sey
 $\frac{dy}{y}$.

Hier haben wir also einen allgemeinen Ausdruck für alle logarithmische Differentialien; z. E. das logarithmische Differential

von z ist $\frac{dz}{z}$, das von x ist $\frac{dx}{x}$ wer ihn erfunden habe, das von v ist $\frac{dv}{v}$ u. s. w. Ein Ausdruck,

den der berühmte Herr Joh. v. Bernoulli erfunden, und ihn besonders bey den Exponentialgrößen gemeinnützig gemacht hat. Dann eine Exponentialgröße ist diejenige, deren Exponent veränderlich ist. z. E. x^y , z^x u. s. w. Wenn ich also x^y differenziren solle, so darf ich diese GröÙe nur einer andern z. E. der GröÙe z gleich setzen, und hernach den gegebenen Regeln zu Folge differenziren. Es sey also $x^y = z$ folglich logarithmisch ausgedruckt, $y \ln x = \ln z$; §. 95. u. differenziert

$$\ln x dy + \frac{y dx}{x} = \frac{dz}{z}$$

$$z \ln x dy + \frac{zy dx}{x} = dz. \text{ Wenn man}$$

nun den Werth von z nemlich x^y in der Gleichung wieder setzt, und sich noch erinnert, daß $\frac{x^y}{x} = x^{y-1}$ sey, wie wir §. 59. bewiesen: so hat man

x^y

und wie man
es wiederum
integriert;

$$xy \, 1 \, x \, dy + y \, xy^{-1} \, dx = dz; \text{ das}$$

Differentiale von der Exponentialgröße
 xy . Will man ein solches Differentiale
wieder integrieren, so muß man an das,
was wir von unendlichen Ketten gesagt
haben, zurück denken. Wir haben bewies-

und wie das
Integrale
davon eine
unendliche
Kette gebe;

sen, daß $1 \cdot dy = \frac{dy}{y}$; nun wollen wir die
gegebene Größe y um 1 vermehren, und
fragen, was demnach das logarithmische
Differentiale von $y + 1$ seye? Die Ant-
wort ist leicht: dann weil das logarithmische
Differentiale von $1 = d\frac{1}{1} = \frac{0}{1} = 0$; so wird

$$\text{das von } y + 1 \text{ seyn } \frac{dy}{y+1} = dy \cdot \frac{1}{y+1}.$$

$$\text{Nun ist } \frac{1}{y+1} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 \text{ u. s. w. } \S. 73$$

$$\text{folgl. } \frac{dy \cdot 1}{y+1} = dy - ydy + y^2dy - y^3dy + y^4dy$$

und sein In-

tegrale oder

$$\int \frac{dy}{y+1} = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 \text{ u. s. w.}$$

In welchem Falle die gegebene Größe um
 1 vermehrt worden ist; man siehet leicht,
daß sie auch um 1 vermindert werden könn-
ne, da dann die Zeichen $+$ und $-$ nicht
abwechseln. §. 73. Die Ursache, war-
um man die gegebene Größe bald um 1
vermehrten oder vermindern muß, erhellet
dara-

und warum
zu Erhaltung
dieser Pro-
gression die
gegebene
Größe bald
um eins ver-
mehrt bald
vermindert
werden muß-
se;

daraus, weil man sonst die Glieder der Reihe, die ins unendliche fortgeht, nicht bestimmen könnte. Daß es aber eine solche Reihe geben müsse, ersieht man aus der gewöhnlichen Integralregel: denn wenn

$$\frac{dy}{y}$$

nach der allgemeinen Regel integriert werden solle, so habe ich, weil

$$\frac{dy}{y} = y^{-1} dy$$

das Integrale

$$\frac{y^{-1} + 1 dy}{-1 + 1} = \frac{y^{-1} + 1}{-1 + 1}$$

$$= \frac{y^0}{0} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Dieser allgemeine

Ausdruck, der mich zwar auf eine unendliche Reihe überhaupt weist, zeigt mir nichts destoweniger noch keine bestimmte Glieder der Reihe an, nach welchen ich das Integrale durch die Approximation finden könnte. Daher pflegt man, die Glieder der Reihe zu bestimmen, die gegebene Grösse um 1 bald zu vermehren bald zu vermindern, je nachdem es die Schicklichkeit der Rechnung erfordert. Wenn man also z. B. die logarithmische Differentialgrösse $x \ln x dx$ zu integrieren hätte, so setzt man $x = y + 1$, folglich wird $\ln x = \ln(y + 1)$ und $dx = dy + 0 = dy$; da sich dann nach den obigen Bestimmungen das Integrale in einer unendlichen Reihe richtig ergeben wird, wenn man

Wie man aus der Natur der Integralrechnung beweisen könne, daß das logarithmische Integrale eine solche Progression überhaupt geben müsse;

und wie desswegen die Vermehrung oder Verminderung um eins nöthig seye.

nur

nur bemerkt, daß, weil $y + 1 = x$ gesetzt wurde, hernach $y = x - 1$ in der Reihe sey.

Von einigen Fällen, in welchen man die Differentialien nochmal differenziren muß; se;

z. E. bey solchen krummen Linien, die ein punctum flexus contrarii haben.

Ferner bey den aus der Evolution erzeugten krummen Linien u. s. w.

§. 223. Endlich und leztens gibt es auch noch manche Fälle, in welchen man nicht zurecht kommen kann, es seye dann, daß man die Differentialgrößen noch einmal u. s. w. differentiire. Wenn man z. E. bey einer krummen Linie, dergleichen die Schlangenähnliche sind, den äußersten Punkt finden will, wo sich die Linie auf die eine oder die andere Seite lenket (punctum flexus contrarii) folglich die größte oder kleinste Semiordinate hat: so muß das Differentiale davon noch einmal differentiirt werden. Der Fall ist nämlich dieser, wenn die krumme Linie zuerst ihre hohle und hernach die convexe Seite, oder umgekehrt, der Ase zuehret; da denn das differentiirte Differentiale entweder positiv oder negativ werden muß, wie man aus der 71. Fig. begreift, wenn man nur mit MP und mR im Sinne Parallel-Linien ziehet, in welchem Falle die verlängerte Tangente das sogenannte Differentio-Differentiale abschneiden und bestimmen wird. Eine ähnliche Beschaffenheit hat es mit den sogenannten Evoluten, und den durch die Evolution erzeugten krummen Linien; deren Berechnung abermal auf der Kunst Differentialien zu differenziren beruhet. Eugenius hat diese Art krumme

krummer Linien zuerst mit einem besondern Namen belegt, und ihren Nutzen bey den oscillirenden Uhren in der Mechanik gezeigt. Den allgemeinen Begriff davon kann man sich leicht bilden, wenn man eine Schnur oder einen Faden, der um eine krumme Linie, z. E. um einen Cirkel herumgewunden ist, nach und nach so abwindet, daß die abgewundene Schnur immer eine gerade Linie, und gleichsam der beständig veränderte Radius der krummen Linie wird, welche sich durch diese Evolution erzeuget. Herr von Leibniz hat diese Linie den Radium osculi genannt: daher die Evolute, oder diese gekrumme Linie, von welcher die Schnur abgewunden wird, der geometrische Ort von allen diesen Radiis in Rücksicht auf ihre Mittelpunkte ist. Wir haben zwei Gattungen von krummen Linien namhaft gemacht, bey welchen man die Differential- und Differentiale nöthig hat. Es ist aber ohne unser Erinnern klar, daß es deren noch mehrere geben muß; von denen wir aber, alle Weitläufigkeit zu vermeiden, nichts weiter melden, und nur zum Beschluß noch zeigen wollen, wie man dann ein Differentiale von neuem differentiirt. Die ganze Kunst bestehet in der Reduction, die wir vortragen werden, wenn wir zuvor von der Art und Weise, wie ein Differentio, Differentia-

Der allgemeine Begriff solcher Linien, die aus der Evolution erzeuget werden, wird vorgetragen.

Wie es noch mehr dergleichen Linien gebe, bey welchen die Differential- und Differentiale angewandt wird;

was Differential- und Differentiale von neuem differentiirt werden; und wie man auch die Differential- und Differentiale

Differentialien
von neuem
differenziren
konne;

dahero es
solche Differ-
entialien
vom ersten,
zweiten,
dritten Grad
u. s. w. gibt;

wie man sie
schreibe und
ausdrücke.

die Differen-
tiation hat
eben die Re-
geln, welche
die Differen-
tialien vom
ersten Grad
befolgen;

wie ein Dif-
ferentialpro-
duct von
neuem diffe-
renziert wer-
de;

le ausgedrückt wird, das nöthigste gesagt haben. Gleichwie das Differentiale von x genannt wird dx , so schreibt man das Differentiale von dx wiederum ddx , und das von ddx heißt $ddd x$. Damit man sich nun kürzer ausdrücke, so schreibt man statt ddx nur $d^2 x$, und statt $ddd x$, $d^3 x$ u. s. w. Es gibt dahero verschiedene Gatungen von Differentialien: denn dx ist eines vom ersten Grad, $d^2 x$ vom zweiten, $d^3 x$ vom dritten Grad u. s. w. Wenn man nun eine gegebene Grösse wirklich differentio • differentiren will, dann so heißt man diese Rechnung, so wird die Operation nach eben denjenigen Regeln gemacht, nach welchen man die Differentiation vom ersten Grad verrichtet. Das wollen wir jetzt beweisen. Es kommt auch hier alles auf die Differentio • Differentiation zweyer sich multiplicirenden Grössen an. Z. E. man solle $x dx$ nochmal differentiren. Man setze

$$x dx = z; \text{ so hat man}$$

$$dx = \frac{z}{x} \text{ folglich}$$

$$d^2 x = \frac{xdz - zdx}{x^2} \quad \text{§. 205.}$$

$$\text{---} \cdot x^2$$

$$x^2 d^2 = xdz - zdx$$

$$zdx = zdx \text{ addirt}$$

zdx

$zdx + x^2 d^2 x = xdz$, da nun gesetzt wurde
 $z = xdx$ so ist, wenn man gleiches für
 gleiches setzt,

wird durch
 die Reduc-
 tion gezeigt,
 und daraus
 die allgemei-
 ne Regel
 nochmalen
 bekräftiget;

$$xdxdx + x^2 d^2 x = xdz$$

$$: x$$

$dx dx + x d^2 x = dz$ das Differentio-
 Differentiale von xdx ; und weil $dx dx$
 kürzer ausgedruckt dx^2 heißt, so ist der
 nochmalen differenzierte Ausdruck von
 $xdx = dx^2 + x d^2 x$, das ist, dx multi-
 plicirt ins Differentiale von x , und x mul-
 tiplicirt in das neue Differentiale von dx ;
 dahero ist die Differentio-Differentia-
 tionsregel mit der Differentiationsregel
 einerley. Wie man nun durch die Re-
 duction alles differenziren kann, wenn
 man ein Product zweyer Grössen zu diffe-
 renziren weiß; so wird man auch in die-
 ser letztern Rechnung die Potenzen der Dif-
 ferentialien, u. s. w. leicht differenziren
 können. Z. E. das Differentiale von dx^2
 ist $= 2dx d^2 x$ aus eben dem Grunde,
 aus welchem das Differentiale von x^2
 $= 2xdx$. Das von $dy^2 = 2dy d^2 y$, u. s. w.
 Eben so geht es bey der Division: dann
 das Differentio-Differentiale von $\frac{x}{dx}$

Anwendung
 der Regel auf
 die Differen-
 tio-Differen-
 tiation der
 Potenzen,
 u. s. w.

wird seyn $\frac{dx^2 - x d^2 x}{dx^2}$ u. s. w. S. 205. Diß ist

num das wichtigste und vornehmste, was
 wir von dieser Lehre sagen wollten. Ei-

Beschluß des
ganzen
Werks

nem aufmerksamen Leser wird nichts unverständlich vorkommen, wenn er sich diese Sätze bekannt gemacht hat, und hernach auch selbst in der anwendenden Mathematik sich umsehen will. Wir glauben daher die sogenannte reine Mathematik, oder die ersten Gründe aller mathematischen Wissenschaften, also vorgetragen zu haben, daß sowohl Leser als Zuhörer ihr Verlangen dadurch stillen können.

7.

